Fundamentos de Lógica Matemática

Webconferência 5 - 22/03/2012
Prova por resolução

Prof. Alexandre L. M. Levada
http://www.dc.ufscar.br/~alexandre

Departamento de Computação (DC)
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

2012/1

Introdução

- É possível provar argumentos utilizando um conjunto menor de regras?
- Principal problema
  - Como é possível caminhar no sentido de métodos automáticos para prova de teoremas?
- Prova por resolução é uma alternativa que combina os conceitos de
  - Forma Normal Conjuntiva (FNC)
  - Notação clausal
  - Resolventes

Objetivos

Prova por resolução

- É um método sintático de prova
- Fundamentado em apenas uma regra de inferência, o que torna sua aplicação simples, vantajosa e computacionalmente viável

Em termos práticos, estamos interessados em entender como a prova por resolução pode ser utilizada na demonstração de teoremas e verificação de argumentos. Há o objetivo de responder a perguntas como:

- Qual é a única regra utilizada na prova por resolução?
- Ela pode ser aplicada a qualquer tipo de proposição?
- Quais as suas vantagens em relação às técnicas anteriores?

A regra da resolução deve sempre ser aplicada a um par de cláusulas (*cláusulas-pais*) e produz como resultado uma cláusula derivada, chamada de *resolvente*. Assim, a regra da resolução permite combinar duas clásulas, gerando uma terceira, pela eliminação de átomos complementares.

Definição 7.1: sejam P e Q duas cláusulas. Se existe um átomo a tal que $a \in P$ e $\neg a \in Q$, então, o resolvente de P e Q com relação ao literal a (ou não a), denotado por *resolvente*$(P, Q; a)$ ou simplesmente *res*$(P, Q; a)$, é a cláusula $(P - \{a\}) \cup (Q - \{\neg a\})$, ou seja, é a cláusula obtida pela união de P e Q, removendo os átomos complementares.

Exemplo: considere as cláusulas $P = \neg p \vee r$ e $Q = q \vee \neg r$. Então, $resolvente(P, Q; r) = \neg p \vee q$. Por outro lado, se $R = \neg p \vee q \vee r$ e $S = \neg q \vee \neg r$, então $resolvente(R, S; r) = \neg p \vee q \vee \neg q$ e $resolvente(R, S; q) = \neg p \vee \neg r \vee r$.

Nesse momento, convém ressaltar a relação entre a regra da resolução definida acima e algumas das regras de inferência. Primeiramente, explicitaremos a equivalência entre a regra modus ponens e a resolução. Sabemos que a regra modus ponens é definida como $p \rightarrow q, p \models q$, pois representa um argumento válido. Utilizando a equivalência da condicional, podemos escrever $P = \neg p \vee q$. Definindo $Q = p$, podemos escrever essa regra, de maneira equivalente, através do conceito de resolvente, como $resolvente(P, Q; p)$, que é q.

Relação com técnicas dedutivas

Equivalência entre resolvente e algumas regras de inferência

MP	$p \rightarrow q, p \models q$	$resolvente(\neg p \vee q, p; p) \equiv q$
MT	$p \rightarrow q, \neg q \models \neg p$	$resolvente(\neg p \vee q, \neg q; q) \equiv \neg p$
SH	$p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$	$resolvente(\neg p \vee q, \neg q \vee r; q) \equiv \neg p \vee r$

Teorema (princípio da resolução para a lógica proposicional): considere duas cláusulas quaisquer P e Q. Seja ainda a um átomo, tal que $a \in P$ e $\neg a \in Q$. Então:

$$P, Q \models \mathit{resolvente}(P, Q; a) \tag{1}$$

Isso significa que o argumento acima é válido. Em outras palavras, isso quer dizer que **o resolvente de duas cláusulas P e Q é consequência lógica das duas cláusulas**.

Portanto, dado um conjunto de premissas, é possível, a partir de sucessivas aplicações da regra da resolução, provar uma conclusão.

O processo de prova por resolução

Exemplo 1: nem sempre o conjunto de proposições sobre o qual desejamos aplicar a regra da resolução é composto apenas por cláusulas. Suponha que se deseje aplicar a resolução às cláusulas $P = \neg p \rightarrow q$ e $Q = q \rightarrow r$. Para resolver esse problema, o primeiro passo consiste em reescrever cada proposição inicial na forma normal conjuntiva, definida por uma conjunção de cláusulas. Assim, para o exemplo em questão, teremos $C_1 = FNC(P) = p \vee q$ e $C_2 = FNC(Q) = \neg q \vee r$, de modo que $resolvente(C_1, C_2; q) = p \vee r$.

O processo de prova por resolução

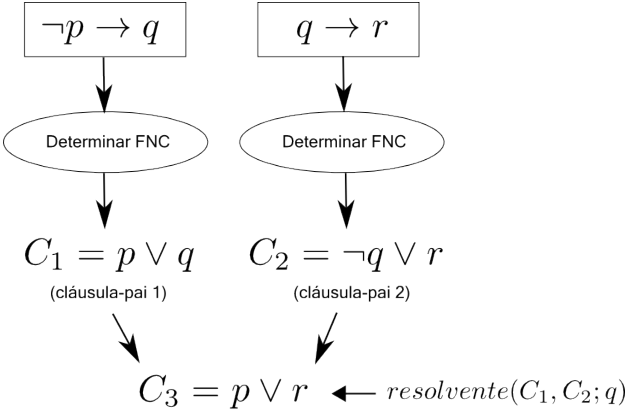

Figura: Diagrama ilustrativo do processo de resolução.

A aplicação da resolução na demonstração de teoremas está diretamente relacionado com a prova por redução ao absurdo, apresentada na unidade 6. Basicamente, existem duas maneiras distintas de mostrar uma conclusão lógica utilizando a prova por resolução:

- através da negação da conclusão;
- através da negação de todo teorema escrito na forma condicional.

O método mais usual é o primeiro, uma vez que a negação da conclusão é, na maioria das vezes, mais simples e direta que a negação de todo teorema escrito na forma condicional.

Tabela: Prova por resolução através da negação da conclusão.

1. Para cada premissa, bem como para a negação da conclusão, encontrar sua FNC.
2. Neste ponto, todas as premissas e a negação da conclusão são conjunções de uma ou várias cláusulas. Identificar e isolar cada cláusula individualmente.
3. Procurar no conjunto de cláusulas por duas delas que contenham o mesmo átomo, de forma que sejam complementares, por exemplo, uma deve conter p e outra $\neg p$. A aplicação da resolução irá eliminar esse átomo das duas cláusulas, gerando uma terceira, que passa a ser uma nova candidata junto às demais. Na prática, as duas cláusulas anteriores transformam-se em uma única, através de uma simples operação de cancelamento.
4. Esse processo descrito no passo 3 deve continuar até que se tenha apenas duas cláusulas, ambas compostas por um único átomo, sendo que uma delas pelo átomo em si e a outra pela sua negação, como, por exemplo, $C_i = p$ e $C_j = \neg p$. Assim, ao se aplicar a resolução nessas duas cláusulas, obtemos a cláusula vazia, denotada aqui por *nil*, o que representa uma contradição, finalizando a prova.

Prova por resolução

Observando o processo, é fácil notar uma grande analogia entre prova por resolução e a prova por redução ao absurdo. Isso decorre do fato de ambas serem baseadas no mesmo princípio. **A grande vantagem da prova por resolução** sobre as demais técnicas é que tudo se resume **a aplicação de uma única regra, a resolução**, o que torna o **método fácil de ser aplicado e, inclusive, automatizado**. A linguagem de programação Prolog, bastante utilizada em aplicações computacionais na área de Inteligência Artificial, utiliza utiliza esse princípio.

Exemplo 1: verifique a validade do argumento seguinte.

$$\neg p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee s, \neg s \vdash p \tag{2}$$

a) Via regras de inferência.
b) Via o princípio da resolução, com negação da conclusão.
c) Via o princípio da resolução, com a negação do teorema na forma condicional.

Solução: a) Para mostrar que o argumento em questão é válido, vamos utilizar a prova direta. A prova é dada pela seguinte dedução:

Exemplo 1: verifique a validade do argumento seguinte.

$$\neg p \to q, q \to r, \neg r \vee s, \neg s \vdash p \quad (2)$$

a) Via regras de inferência.
b) Via o princípio da resolução, com negação da conclusão.
c) Via o princípio da resolução, com a negação do teorema na forma condicional.

Solução: a) Para mostrar que o argumento em questão é válido, vamos utilizar a prova direta. A prova é dada pela seguinte dedução:

(1)	$\neg p \to q$	premissa	
(2)	$q \to r$	premissa	
(3)	$\neg r \vee s$	premissa	
(4)	$\neg s$	premissa	
(5)	$\neg r$	silogismo disjuntivo	$3, 4$
(6)	$\neg q \vee r$	equivalência da condicional	2
(7)	$\neg q$	silogismo disjuntivo	$5, 6$
(8)	$p \vee q$	equivalência da condicional	1
(9)	p	silogismo disjuntivo	$7, 8$

b) Neste caso, para provar o argumento utilizando o princípio da resolução, primeiramente devemos encontrar a FNC das premissas, da negação da conclusão e identificar as cláusulas:

$FNC(\neg p \to q)$	$\neg p \to q \equiv \neg(\neg p) \vee q \equiv p \vee q$
$FNC(q \to r)$	$q \to r \equiv \neg q \vee r$
$FNC(\neg r \vee s)$	$\neg r \vee s$
$FNC(\neg s)$	$\neg s$
conclusão negada:	$\neg p$
$FNC(\neg p)$	$\neg p$

b) Neste caso, para provar o argumento utilizando o princípio da resolução, primeiramente devemos encontrar a FNC das premissas, da negação da conclusão e identificar as cláusulas:

$FNC(\neg p \to q)$	$\neg p \to q \equiv \neg(\neg p) \vee q \equiv p \vee q$
$FNC(q \to r)$	$q \to r \equiv \neg q \vee r$
$FNC(\neg r \vee s)$	$\neg r \vee s$
$FNC(\neg s)$	$\neg s$
conclusão negada:	$\neg p$
$FNC(\neg p)$	$\neg p$

Assim, temos a seguinte prova por resolução:

Cláusulas		Comentário
(1)	$p \vee q$	cláusula da primeira premissa
(2)	$\neg q \vee r$	cláusula da segunda premissa
(3)	$\neg r \vee s$	cláusula da terceira premissa
(4)	$\neg s$	cláusula da quarta premissa
(5)	$\neg p$	cláusula da negação da conclusão
(6)	q	resolvente da resolução de 1 e 5
(7)	r	resolvente da resolução de 2 e 6
(8)	s	resolvente da resolução de 3 e 7
(9)	nil	resolvente da resolução de 4 e 8

Exemplos

c) Para provar o argumento utilizando o princípio da resolução com a negação de todo teorema, o primeiro passo consiste em escrever o argumento na forma condicional:

$$((\neg p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s) \to p \tag{3}$$

A seguir, devemos encontrar a negação da expressão toda, escrevendo a fórmula resultante na FNC. Isso requer a utilização da álgebra proposicional. Aplicando a negação e utilizando a equivalência da condicional, temos:

$$\begin{aligned} \neg(((\neg p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s) \to p) \equiv \\ \neg(\neg((\neg p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s) \vee p) \end{aligned} \tag{4}$$

Aplicar a Lei de De Morgan na negação mais externa nos leva à:

$$\begin{aligned} \neg(\neg((\neg p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s) \vee p) \equiv \\ ((\neg p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s) \wedge \neg p \end{aligned} \tag{5}$$

E, finalmente, eliminando as condicionais restantes por equivalências lógicas e os parêntesis desnecessários, chegamos à FNC desejada:

$$\begin{aligned} ((\neg p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s) \wedge \neg p \equiv \\ (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s \wedge \neg p \end{aligned} \tag{6}$$

Note que as cláusulas obtidas são exatamente iguais às obtidas no item anterior, pela negação da conclusão. Portanto, a partir desse ponto, a prova por resolução será idêntica ao caso anterior.

Árvore de refutação

A Figura 2 ilustra a árvore de refutação correspondente à prova por resolução anterior. Trata-se de uma representação gráfica equivalente à sequência de operações (resolventes) indicadas por uma tabela.

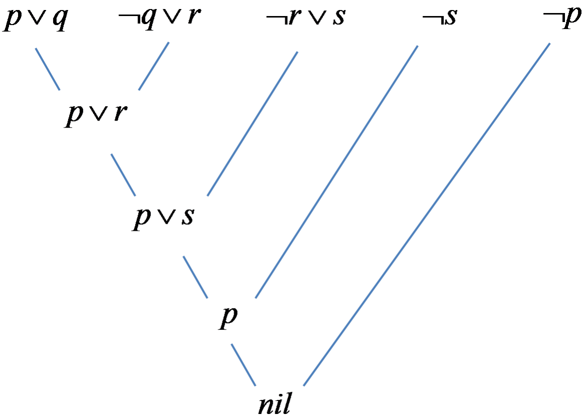

Figura: Diagrama ilustrativo do processo de resolução.

Exemplo 2: verificar a validade do argumento seguinte.

$$\neg p \to q, r \to s, (q \vee s) \to t, \neg t \vdash \neg p \wedge \neg r \tag{7}$$

a) Mediante prova por resolução com negação da conclusão.

b) Mediante prova por resolução com negação do teorema na forma condicional.

Solução: a) Para a prova por resolução, o primeiro passo consiste na determinação das FNCs das premissas e da negação da conclusão.

$FNC(p \to q)$	$p \to q \equiv \neg p \vee q$
$FNC(r \to s)$	$r \to s \equiv \neg r \vee s$
$FNC((q \vee s) \to t)$	$(q \vee s) \to t \equiv$
	$\neg(q \vee s) \vee t \equiv$
	$(\neg q \wedge \neg s) \vee t \equiv$
	$(\neg q \vee t) \wedge (\neg s \vee t)$
$FNC(\neg t)$	$\neg t$
conclusão negada:	$\neg(\neg p \wedge \neg r) \equiv$
	$p \vee r$
$FNC(\neg(\neg p \wedge \neg r))$	$p \vee r$

Identificando e separando as cláusulas, efetuamos a prova por resolução:

	Cláusulas	Comentário
(1)	$\neg p \vee q$	cláusula da primeira premissa
(2)	$\neg r \vee s$	cláusula da segunda premissa
(3)	$\neg q \vee t$	cláusula 1 da terceira premissa
(4)	$\neg s \vee t$	cláusula 2 da terceira premissa
(5)	$\neg t$	cláusula da quarta premissa
(6)	$p \vee r$	cláusula da negação da conclusão
(7)	$\neg p \vee t$	resolvente da resolução de 1 e 3
(8)	$\neg p$	resolvente da resolução de 5 e 7
(9)	$\neg s$	resolvente da resolução de 4 e 5
(10)	$\neg r$	resolvente da resolução de 2 e 9
(11)	p	resolvente da resolução de 6 e 10
(12)	nil	resolvente da resolução de 8 e 11

Portanto, o argumento em questão é válido.

b) O primeiro passo consiste em escrevr o teorema na forma condicional:

$$((p \to q) \land (r \to s) \land ((q \lor s) \to t) \land \neg t) \to (\neg p \land \neg r) \tag{8}$$

Em seguida, devemos negar toda a sentença e escrever o resultado da negação na FNC. Aplicando a negação na forma condicional e utilizando a equivalência da condicional, temos:

$$\begin{aligned}\neg(((p \to q) \land (r \to s) \land ((q \lor s) \to t) \land \neg t) \to (\neg p \land \neg r)) \equiv \\ \neg(\neg((p \to q) \land (r \to s) \land ((q \lor s) \to t) \land \neg t) \lor (\neg p \land \neg r))\end{aligned} \tag{9}$$

Aplicar a Lei de De Morgan na negação mais externa nos leva à:

$$\begin{aligned}\neg(\neg((p \to q) \land (r \to s) \land ((q \lor s) \to t) \land \neg t) \lor (\neg p \land \neg r)) \equiv \\ ((p \to q) \land (r \to s) \land ((q \lor s) \to t) \land \neg t) \land \neg(\neg p \land \neg r)\end{aligned} \tag{10}$$

Aplicando De Morgan no último termo e eliminando as condicionais restantes através de equivalências lógicas:

$$\begin{aligned}((p \to q) \land (r \to s) \land ((q \lor s) \to t) \land \neg t) \land \neg(\neg p \land \neg r) \equiv \\ (\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land (\neg(q \lor s) \lor t) \land \neg t \land (p \lor r)\end{aligned} \tag{11}$$

Por fim, aplicando De Morgan e a distributiva no terceiro termo, chegamos à FNC desejada:

$$\begin{aligned}(\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land (\neg(q \lor s) \lor t) \land \neg t \land (p \lor r) \equiv \\ (\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s) \land (\neg q \lor t) \land (\neg s \lor t) \land \neg t \land (p \lor r)\end{aligned} \tag{12}$$

Exemplos

Observando a FNC, é possível notar que as cláusulas que a compõe são exatamente as mesmas obtidas no item anterior. A representação gráfica em termos da árvore de refutação é mostrada na Figura 3.

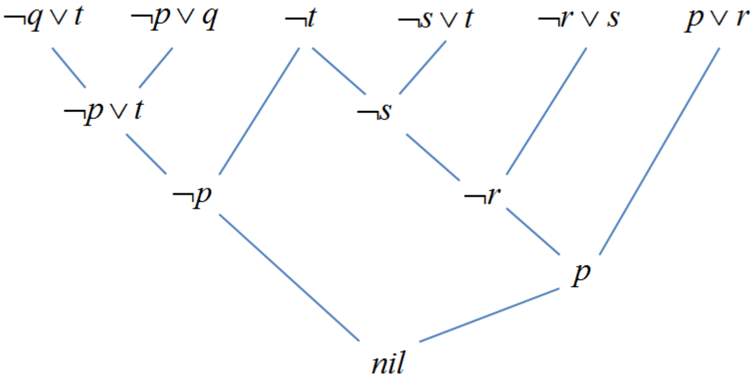

Figura: Diagrama ilustrativo do processo de resolução.

Observações

A operação resolvente deve ser aplicada somente à cláusulas.

Na prova por resolução, não há necessidade de utilizar todas as cláusulas para chegar na cláusula vazia (nil). Isso significa que podem sobrar folhas que não são utilizadas na árvore de refutação.

Existem outros métodos utilizados para se provar argumentos automaticamente: o algoritmo de Wang é um deles. Com isso, torna-se possível um computador provar teoremas de maneira totalmente autônoma, o que foi por um longo período um grande problema da área de inteligência artificial.