Fundamentos de Lógica Matemática

Webconferência 1 - 09/02/2012

Prof. Alexandre L. M. Levada
http://www.dc.ufscar.br/~alexandre

Departamento de Computação (DC)
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

2012/1

Guia da disciplina

1. Objetivos
2. Ementa
3. Critérios de Avaliação
4. Frequência
5. Bibliografia

Programa da Disciplina

- UNIDADE 1 - Introdução à logica proposicional
- UNIDADE 2 - Tabelas-verdade: tautologia, contradição e contingência
- UNIDADE 3 - Consequência e equivalência lógicas
- UNIDADE 4 - Álgebra proposicional
- UNIDADE 5 - Inferência lógica
- UNIDADE 6 - Técnicas dedutivas
- UNIDADE 7 - Prova por resolução
- UNIDADE 8 - Introdução à lógica de predicados

Objetivos

Parte 1 - Unidades de 1 a 4

- Fornecer fundamentos matemáticos para aspectos relacionados ao projeto de computadores (hardware)
  - Lógica digital
  - Arquitetura de computadores
  - Circuitos digitais

Parte 2 - Unidades de 5 a 8

- Fornecer a base para aspectos relacionados à manipulação da informação (software)
  - Representação e extração de conhecimento
  - Inteligência artificial
  - Aprendizado de máquina

Critério de Avaliação

Cômputo da média final

A disciplina contempla diversos momentos de avaliação, ponderando-os da seguinte forma:

A nota final (MF) será computada de acordo com a seguinte regra:

$$MF = 0.39 \times AAs + 0.1 \times APAs + 0.51 \times APs$$

com AAs, $APAs$ e APs sendo as médias aritméticas das notas das listas de exercícios, fóruns de discussões e provas presenciais, respectivamente

Comentários: Maiores detalhes sobre recuperação paralela, prova repositiva e prova de recuperação final encontram-se no Guia da disciplina.

- As atividades que serão efetivamente utilizadas no cômputo da frequência são as 10 listadas a seguir:
  - APAI-1 - Fórum de discussão da Unidade 1
  - AAII-1 - Lista de exercícios da Unidade 2
  - AAIII-1 - Lista de exercícios da Unidade 3
  - APAIV-1 - Fórum de discussão da Unidade 4
  - AAV-1 - Lista de exercícios da Unidade 5
  - AP-1 - Primeira avaliação presencial
  - AAVI-1 - Lista de exercícios da Unidade 6
  - APAVII-1 - Fórum de discussão da Unidade 7
  - AAVIII-1 - Lista de exercícios da Unidade 8

OBS: Portanto, o aluno que não obtiver, no mínimo, 75% de frequência, será reprovado por faltas. Porém, note que é necessário a entrega de ao menos 8 das atividades da lista (80%). Como duas atividades já não estão na lista acima (AAIV-1 e AAVII-1, ou seja, listas de exercícios das Unidades 4 e 7), isso significa que no geral são necessárias, no mínimo, 8 das 12 atividades totais para conseguir a frequência necessária. Convém ressaltar que a não realização de Atividades Avaliativas não listadas na sequência acima, apesar de não acarretar em falta, irá provocar diminuição na média final (nota zero na atividade).

Bibliografia

Livros em português

- **Levada, A, L. M. (2011) Fundamentos de Lógica Matemática, Livro texto da coleção UAB, São Carlos, EdUFSCar**.
- Nicoletti, M.C. (2010) A Cartilha da Lógica, São Carlos, Série Apontamentos, EdUFSCar.
- Daghlian, J. (2009) Lógica e Álgebra de Boole, São Paulo, Editora Atlas.
- Alencar Filho, E. (2002) Iniciação a Lógica Matemática, São Paulo, Nobel.
- Finger, M.; Melo, A. C. V.; Silva, F. S. C. (2006) Lógica para computação, São Paulo, Thomson Learning.
- Souza, J. N. (2002) Lógica para ciência da computação, São Paulo, Editora Campus.
- Nolt, J.; Rohatyn, D. (1991) Lógica, São Paulo, McGraw-Hill.
- Bispo, C. A. F.; Castanheira, L. B.; Filho, O. M. S. Introdução à Lógica Matemática. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

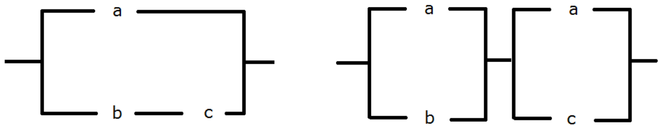
Bibliografia

Livros em inglês

- Snyder, F. H.; Snyder, D. H; Wasserman, R. The Power of Logic. 4. ed. New York: McGraw Hill, 2008.
- Grassmann, W. K.; Tremblay, J. P. (1996) Logic and Discrete Mathematics: A Computer Science Perspective, Prentice Hall, 1996.
- Hilbert, D.; Ackermann, W. (1999) Principles of Mathematical Logic, American Mathematical Society (reimpressão do orignal de 1950).
- Rautenberg, W. A Concise Introduction to Mathematical Logic. 3. ed. Berlin: Springer, 2010.

Lógica proposicional: Alfabeto e considerações iniciais

- Átomos
- Operadores lógicos binários
  - Negação ($\neg$ ou $\sim$)
  - Conjunção ($\wedge$ ou $\cdot$)
  - Disjunção ($\vee$ ou $+$)
  - Condicional ($\leftarrow$)
  - Bicondicional ($\leftrightarrow$)
  - Ou exclusivo ($\underline{\vee}$)
- Existem 16 funções lógicas binárias possíveis (operadores)
- Fórmulas bem-formadas
- Analogia com lógica digital



a + b . c = (a + b) . (a + c)

- Mecanismos para determinar o valor lógico de proposições compostas, dados valores de seus átomos (aplicação prática: projeto de circuitos digitais)
- Conceitos importantes
  - Tautologia
  - Contradição
  - Contingência

p	q	r	$\neg r$	$p \vee \neg r$	$q \wedge \neg r$	$(p \vee \neg r) \rightarrow (q \wedge \neg r)$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F

- Quando uma proposição q é consequência lógica de um conjunto de 1 ou mais proposições P?

Definição 3.1: dadas as proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$, dizemos que Q é *consequência lógica* de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se e somente se a seguinte regra sempre for válida: se $P_1, P_2, \ldots, P_n$ forem todas simultaneamente verdadeiras, ou seja, $V(P_1) = V(P_2) = \cdots = V(P_n) = V$, então, Q também é verdade, ou seja, $V(Q) = V$. Se Q é *consequência lógica* de $P_1, P_2, \ldots, P_n$, utilizaremos a seguinte notação:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \models Q \tag{1}$$

Teorema 3.1: dadas as proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$, a proposição Q é consequência lógica de $P_1, P_2, \ldots, P_n$, se e somente se $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \rightarrow Q$ for uma tautologia.

Exemplo: considere as proposições $P = (p \rightarrow q)$, $Q = (q \rightarrow r)$ e $R = (p \rightarrow r)$. Verifique se R é conseuqência lógica de P, Q.
Solução: Podemos verificar que $P, Q \models R$ mostrando que $S = (P \wedge Q) \rightarrow R$ é uma tautologia. Para isso, basta construir a tabela-verdade de S.

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow r)$	S
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Teorema 3.2: dadas as proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$, a proposição Q é consequência lógica de $P_1, P_2, \ldots, P_n$, se e somente se $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge \neg Q)$ for uma contradição.

Exemplo 4: ainda supondo $P = (p \to q)$, $Q = (q \to r)$ e $R = (p \to r)$, verifique que $P, Q \models R$.

Solução: Podemos verificar que $P, Q \models R$ mostrando que $S = P \wedge Q \wedge \neg R$ é uma contradição. Para isso, procedemos com a construção da respectiva tabela-verdade.

p	q	r	$(p \to q)$	$(q \to r)$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$(p \to r)$	$\neg(p \to r)$	S
V	V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V	F	F

Definição 3.2: dizemos que uma proposição P é *logicamente equivalente* a uma proposição Q, o que é representado como $P \equiv Q$, se e somente se P for consequência lógica de Q e Q for consequência lógica de P, ou seja, se e somente se $P \models Q$ e $Q \models P$.

Portanto, duas proposições P e Q são equivalentes, isto é, $P \equiv Q$, se e somente se $P \leftrightarrow Q$ for uma tautologia. Isso equivale a dizer que duas *proposições são logicamente equivalentes se e somente se suas tabelas-verdade forem idênticas*.

Exemplo: sendo $P = (p \vee q) \rightarrow r$ e $Q = (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$, mostre que $P \equiv Q$.

Solução: Para demonstrar essa equivalência lógica, basta verificarmos que $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia, o que pode ser feito construindo uma tabela-verdade.

p	q	r	$(p \vee q)$	P	$(p \rightarrow r)$	$(q \rightarrow r)$	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

Proposições associadas à condicionais

Dada uma proposição condicional da forma $p \rightarrow q$, podemos associar a ela outras três proposições condicionais envolvendo apenas os átomos p (antecedente) e q (consequente):

- a proposição recíproca $q \rightarrow p$
- a proposição contrária $\neg p \rightarrow \neg q$
- a proposição contrapositiva $\neg q \rightarrow \neg p$

Dessa forma, podemos facilmente verificar duas propriedades:

- Propriedade 1: uma condicional e sua contrapositiva são equivalentes, ou seja, $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$.
- Propriedade 2: a recíproca e a contrária de uma condicional $p \rightarrow q$ são equivalentes, ou seja, $q \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow \neg q$.

OBS: Numa condicional verdadeira $p \rightarrow q$, a proposição p é condição suficiente para q e a proposição q é condição necessária para p.

Exemplo

Em uma condicional verdadeira, o antecedente é condição suficiente e o consequente é condição necessária.

Exemplo:

Se alguém possui CNH, então é maior de idade. $(c \rightarrow m)$

Possuir CNH é condição suficiente para ser maior de idade (antecedente).

Ser maior de idade é condição necessária para se ter CNH (consequente).

Se alguém não é maior de idade, então não tem CNH $(\neg m \rightarrow \neg c)$

Equivalências notáveis

A seguir são listadas algumas dessas principais equivalências, conhecidas como propriedades dos operadores lógicos. Elas definem a base da álgebra proposicional, assunto da próxima Unidade.

- Dupla negação: $\neg(\neg p) \equiv p$
- Leis idempotentes: $p \vee p \equiv p$ e $p \wedge p \equiv p$
- Leis comutativas: $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ e $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- Leis associativas: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ e $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
- Leis distributivas: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ e $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- Regra da bicondicional: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Considerações Finais

- A dúvida é o primeiro sinal do aprendizado. Ninguém aprende nada sem ter dúvidas!
- Da mesma forma, receber respostas prontas para todas as suas dúvidas é muitas vezes um fator limitante para a construção do conhecimento (e por consequência do aprendizado) em especial nas ciências exatas em que um aspecto muito importante é a criatividade.
- Quando alguém mostra uma solução, um algoritmo pronto, muitas vezes acabamos por abdicar de construir nossa própria solução, com base no nosso entendimento, nossa visão de mundo.
- Portanto, tentar, e por vezes errar, é parte do aprendizado.