Unidade 6

Funções trigonométricas
Regras de L'Hopital

Agora estaremos fazendo uma pequena revisão de funções trigonométricas e apresentando suas derivadas. Estaremos estudando também um método para calcular limites indeterminados através de derivadas.

6.1 Pequena revisão de trigonometria

6.1.1 Trigonometria geométrica

Consideremos os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura 6.1. Os dois triângulos são semelhantes, pois seus ângulos internos são iguais (congruentes). Assim, temos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

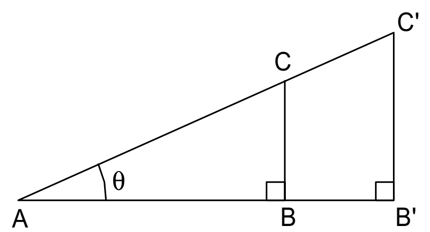


Figura 6.1.

Assim, sendo ABC um triângulo retângulo, como na figura 6.1 as razões $\frac{AB}{AC}$, $\frac{BC}{AC}$ e $\frac{BC}{AB}$ dependem somente da abertura $\theta = \hat{A}$.

Chamamos

$$\text{cosseno de } \theta = \cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{seno de } \theta = \operatorname{sen}\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente de } \theta = \operatorname{tg}\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}$$

Deduz-se imediatamente que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.

São bem conhecidos os valores

θ	$\cos\theta$	$\operatorname{sen}\theta$	$\operatorname{tg}\theta$
0	1	0	0
$30°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/\sqrt{3}$
$45°$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$90°$	0	1	não se define

Se $\overset{\frown}{PQ}$ é um arco de um círculo de raio r, correspondente a um ângulo central de abertura α, o comprimento c de $\overset{\frown}{PQ}$ é dado por

$$\boxed{c = r \cdot (\text{medida de } \alpha \text{ em radianos})}$$

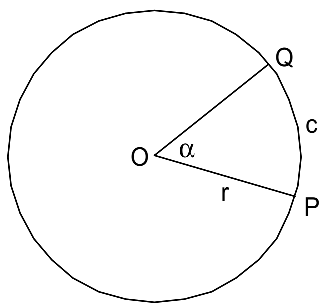


Figura 6.2.

Assim, o comprimento c do arco $\overset{\frown}{PQ}$ é diretamente proporcional a r e a α. Quando $\alpha = 360°$, temos

$$\boxed{c = \text{comprimento da circunferência} = 2\pi \cdot r}$$

Assim sendo,

$$\boxed{360 \text{ graus} = 2\pi \text{ radianos, ou seja, } 180^\circ = \pi}$$

Se $r = 1 =$ *uma unidade de comprimento*, o comprimento c do arco $\widehat{PQ}$ é simplesmente a medida de α em radianos.

A área do setor circular de ângulo central α também é proporcional a α. Quando $\alpha = 2\pi$, temos a área de um círculo de raio r: $A = \pi r^2$. Assim, um setor circular de abertura α, tem área $A_\alpha = \dfrac{\alpha}{2} \cdot r^2$ (α em radianos).

6.1.2 Trigonometria analítica

Para definir as funções trigonométricas de variável real, consideramos, em um sistema cartesiano ortogonal, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ (de centro em $(0, 0)$ e raio 1). Esta circunferência é o que chamaremos de *círculo trigonométrico*.

Dado um número real α, tomamos $A = (1, 0)$ e demarcamos, no círculo trigonométrico, um ponto P_α tal que a medida do percurso de A a P_α, sobre o círculo trigonométrico, é igual a $|\alpha|$ (figura 6.3).

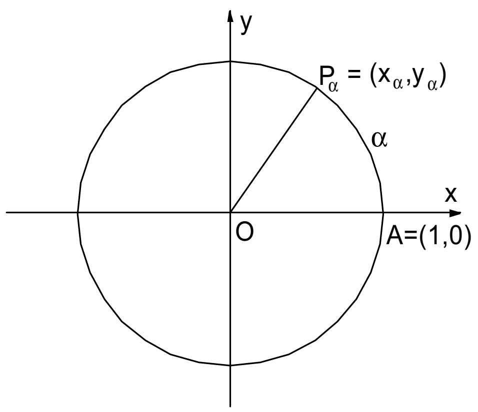


Figura 6.3.

O percurso $\widehat{AP_\alpha}$ é feito no sentido *anti-horário* se $\alpha > 0$, e é feito no sentido *horário* se $\alpha < 0$. Dizemos que α é a medida algébrica do arco orientado AP_α.

Assim, por exemplo, $P_\pi = P_{-\pi} = (-1, 0)$, $P_{\pi/2} = (0, 1)$, $P_{-\pi/2} = (0, -1)$, $P_{\pi/4} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $P_{\pi/3} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$, e $P_0 = (1, 0) = P_{2\pi} = P_{2n\pi}$, para cada inteiro n.

Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos $P_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$, definido como acima. Definimos

$$x_\alpha = \cos\alpha = \text{cosseno de } \alpha,$$
$$y_\alpha = \operatorname{sen}\alpha = \text{seno de } \alpha$$

Para estendermos a definição de *tangente de* α a arcos orientados α, tomamos um eixo y', paralelo ao eixo y, de origem $O' = A$, orientado positivamente para cima, no qual usaremos a mesma escala de medidas do eixo y. Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, consideramos a reta OP_α. Se $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, esta reta intercepta o eixo y' em T_α. Veja figura 6.4. Sendo t_α a abcissa de T_α no eixo y', definimos

$$t_\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \text{tangente de } \alpha$$

Assim sendo, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Se $0 < \alpha < \pi/2$, os valores $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$, e $\operatorname{tg}\alpha$ coincidem com aqueles das definições geométricas de cosseno, seno e tangente, dadas na seção 6.1.1.

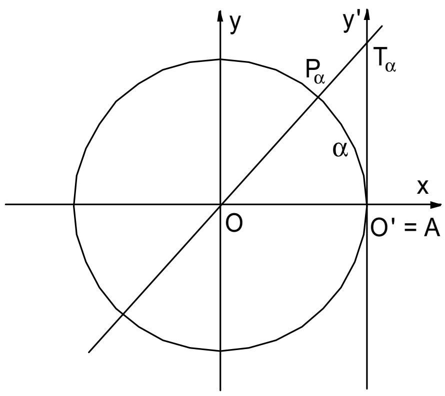


Figura 6.4. No sistema Oxy, $T_\alpha = (1, t_\alpha) = (1, \operatorname{tg}\alpha)$.

Também definem-se as funções trigonométricas

$$\text{cotangente de } \alpha = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (\alpha \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z})$$
$$\text{secante de } \alpha = \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \forall n \in \mathbb{Z})$$
$$\text{cossecante de } \alpha = \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (\alpha \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z})$$

Na figura 6.5, ilustramos geométricamente as seis funções trigonométricas de um arco α no primeiro quadrante, isto é, satisfazendo $0 < \alpha < \pi/2$.

Listamos abaixo algumas fórmulas úteis, envolvendo as funções trigonométricas. Aqui e sempre, $\cos^2 a = (\cos a)^2$, $\operatorname{sen}^2 a = (\operatorname{sen} a)^2$, $\operatorname{tg}^2 a = (\operatorname{tg} a)^2$, etc.

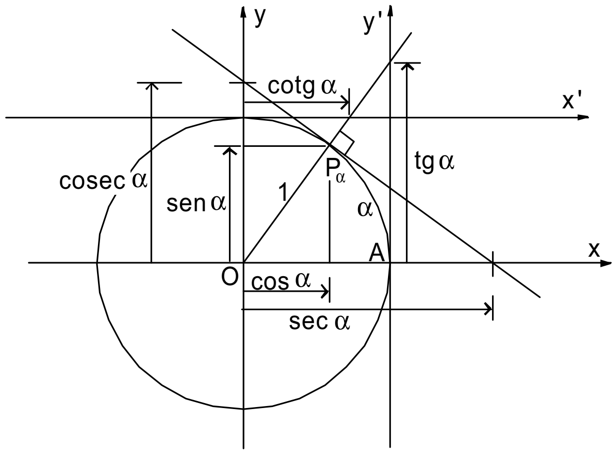


Figura 6.5.

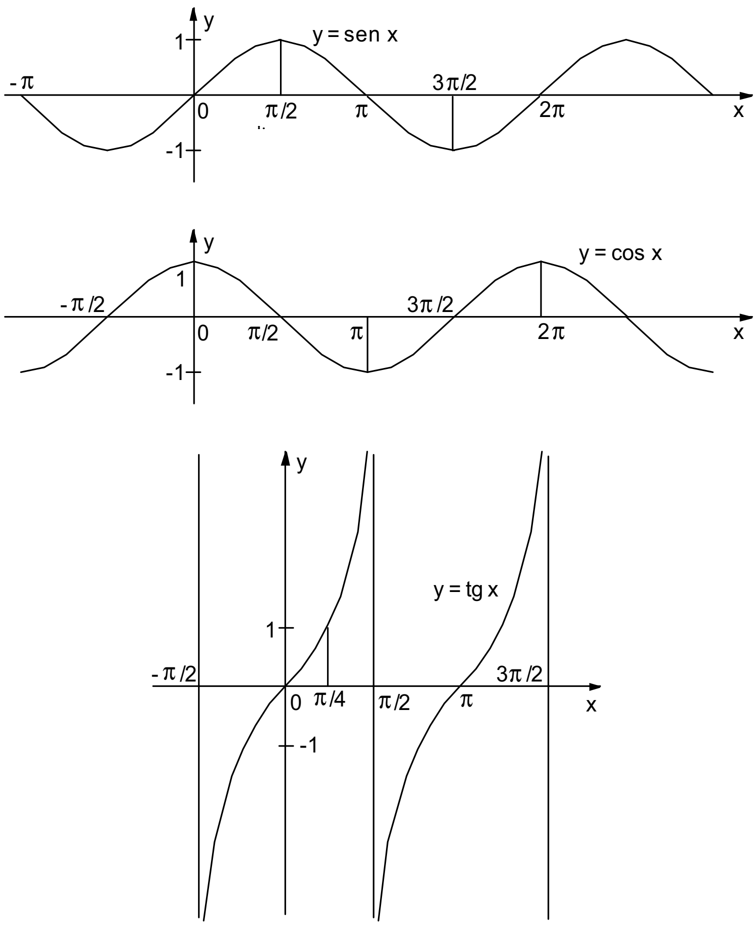


Figura 6.6. Gráficos das funções seno, cosseno e tangente.

1. $\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1$ (isto porque $x_a^2 + y_a^2 = 1$)
2. $1 + \operatorname{tg}^2 a = \sec^2 a$ (dividindo-se ambos os membros da equação 1 por $\cos^2 a$)
   $1 + \operatorname{cotg}^2 a = \operatorname{cosec}^2 a$ (dividindo-se ambos os membros da equação 1 por $\operatorname{sen}^2 a$)
3. $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$
   $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$
   $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
   $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
4. $\cos(-a) = \cos a$, $\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a$
   $\operatorname{tg}(-a) = \dfrac{\operatorname{sen}(-a)}{\cos(-a)} = \dfrac{-\operatorname{sen} a}{\cos a} = -\operatorname{tg} a$
5. $\operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen}(a+a) = 2 \operatorname{sen} a \cos a$
   $\cos 2a = \cos(a+a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$
6. $\cos a = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, $\operatorname{sen} a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$

6.2 Derivando funções trigonométricas

Apresentamos agora as derivadas das funções trigonométricas.

Regra 13 *Derivando em relação a x, temos*

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen} x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\operatorname{sen} x \\
(\operatorname{tg} x)' &= \sec^2 x \\
(\operatorname{cotg} x)' &= -\operatorname{cosec}^2 x \\
(\sec x)' &= \sec x \ \operatorname{tg} x \\
(\operatorname{cosec} x)' &= -\operatorname{cosec} x \ \operatorname{cotg} x
\end{aligned}$$

De um modo geral, pela regra da cadeia, temos
$(\operatorname{sen} u)' = (\cos u) \cdot u'$, $(\cos u)' = -(\operatorname{sen} u) \cdot u'$, $(\operatorname{tg} u)' = (\sec^2 u) \cdot u'$, *etc.*

As derivadas das quatro últimas funções trigonométricas podem ser calculadas a partir das derivadas das funções seno e cosseno, fazendo-se uso das relações

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

e aplicando-se a regra de derivação de quociente, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

6.3 Funções trigonométricas inversas e suas derivadas

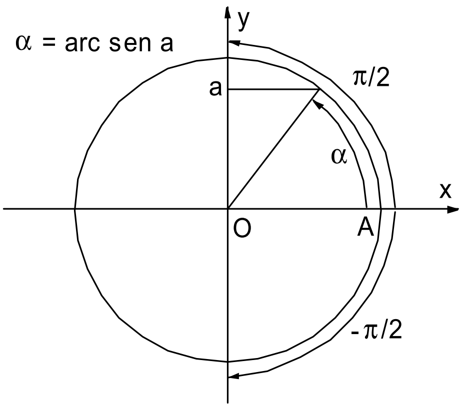
A função arco-seno. Para cada número real a, $-1 \leq a \leq 1$, existe um único arco orientado α, $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$, tal que $\operatorname{sen} \alpha = a$.

Dizemos que α *é o arco cujo seno é* a, ou que α é o *arco-seno de* a, e denotamos isto por

$$\alpha = \operatorname{arc\,sen} a$$

Sumarizando,

$$\boxed{\alpha = \operatorname{arc\,sen} a \quad \text{se e somente se} \quad \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = a \\ -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2 \end{cases}}$$



Assim, por exemplo (confira),

$$\operatorname{arc\,sen} 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arc\,sen} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arc\,sen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

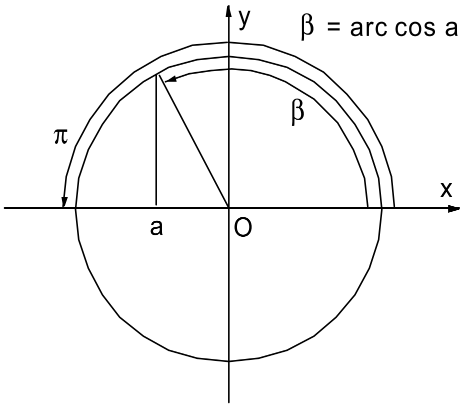
A função arco-cosseno. Para cada número real a, $-1 \leq a \leq 1$, existe um único arco orientado β, $0 \leq \beta \leq \pi$, tal que $\cos \beta = a$.

Dizemos que β *é o arco cujo cosseno é* a, ou que β é o *arco-cosseno de* a, e denotamos isto por

$$\beta = \arccos a$$

Sumarizando,

$$\boxed{\beta = \arccos a \quad \text{se e somente se} \quad \begin{cases} \cos \beta = a \\ 0 \leq \beta \leq \pi \end{cases}}$$

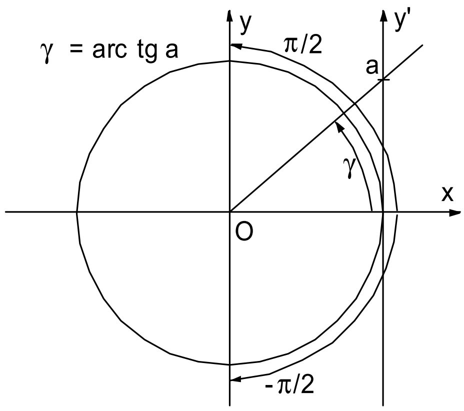


Assim, por exemplo, $\arccos 1 = 0$, $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$, $\arccos(-1/2) = 2\pi/3$, $\arccos(-1) = \pi$.

A função arco-tangente. Para cada número real a, $-\infty < a < +\infty$, existe um único arco orientado γ, $-\pi/2 < \gamma < \pi/2$, tal que $\operatorname{tg}\gamma = a$.

Dizemos que γ *é o arco cuja tangente é* a, ou que γ é o *arco-tangente de* a, e denotamos isto por

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg} a$$



Sumarizando,

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg} a \quad \text{se e somente se} \quad \begin{cases} a = \operatorname{tg}\gamma \\ -\pi/2 < \gamma < \pi/2 \end{cases}$$

Assim, definem-se as funções $\operatorname{arc\,sen} x$ e $\arccos x$, para $-1 \leq x \leq 1$, e $\operatorname{arc\,tg} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Algumas calculadoras científicas chamam essas funções pelas teclas $\boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{SIN}}$, $\boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{COS}}$, $\boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{TAN}}$, e às vezes pelas teclas $\boxed{\text{SIN}^{-1}}$, $\boxed{\text{COS}^{-1}}$, $\boxed{\text{TAN}^{-1}}$.

Regra 14

$$(\operatorname{arc\,sen} u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', \quad -1 < x < 1$$
$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', \quad -1 < x < 1$$
$$(\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u', \quad -\infty < x < +\infty$$

6.4 Problemas

1. Calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $y = \operatorname{cotg}(x^3 - 2x)$ (b) $f(x) = \cos 3x^2$

   (c) $y = \dfrac{\cos 4x}{1 - \operatorname{sen} 4x}$ (d) $g(x) = \cos^2 3x$ ($\cos^2 a$ significa $(\cos a)^2$)

   (e) $y = x^2 \sec^2 5x$

   Respostas. (a) $-(3x^2 - 2)\operatorname{cosec}^2(x^3 - 2x)$ (b) $-6x \operatorname{sen} 3x^2$ (c) $\frac{4}{1-\operatorname{sen} 4x}$ (d) $-3 \operatorname{sen} 6x$ (e) $2x \sec^2 5x + 10x^2 \sec^2 5x \operatorname{tg} 5x$

2. Calcule a derivada da função $y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}$.

   Resposta. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

3. Determine y' por derivação implícita.

   (a) $y = x \operatorname{sen} y$ (b) $e^x \cos y = x\, e^y$

   Respostas. (a) $y' = \frac{\operatorname{sen} y}{1 - x \cos y}$ (b) $y' = \frac{e^x \cos y - e^y}{e^x \operatorname{sen} y + x e^y}$

4. Esboce o gráfico da função $y = \operatorname{arc\,tg} x$, analisando-a previamente através de derivadas e limites apropriados.

   Resposta. (Daremos as derivadas como suporte à solução.)
   $y' = \frac{1}{1+x^2}$, $y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$