Unidade 8

Integrais definidas e aplicações

8.1 A integral definida

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$.

Subdividamos o intervalo $[a, b]$ através de $n + 1$ pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

O conjunto de pontos $\wp = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ constitui uma *subdivisão* ou *partição* do intervalo $[a, b]$.

Tomemos ainda pontos $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n$ em $[a, b]$, tais que

$$\begin{aligned} c_1 &\in [x_0, x_1] = [a, x_1], \\ c_2 &\in [x_1, x_2], \\ &\vdots \\ c_i &\in [x_{i-1}, x_i], \\ &\vdots \\ c_n &\in [x_{n-1}, x_n]. \end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - x_0 \\ \Delta x_2 &= x_2 - x_1 \\ &\vdots \\ \Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \\ &\vdots \\ \Delta x_n &= x_n - x_{n-1} \end{aligned}$$

E formemos a soma

$$S = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Esta é uma *soma integral* de f, no intervalo $[a, b]$, correspondente à partição $\wp$, e à escolha de pontos intermediários $c_1, \ldots, c_n$.

Note que, quando $f(x) > 0$ em $[a, b]$, a soma integral de f, $S = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, é a soma das áreas de n retângulos, sendo o i-ésimo retângulo, para $1 \leq i \leq n$, de base Δx_i e altura $f(c_i)$. Isto é ilustrado na figura 8.1.

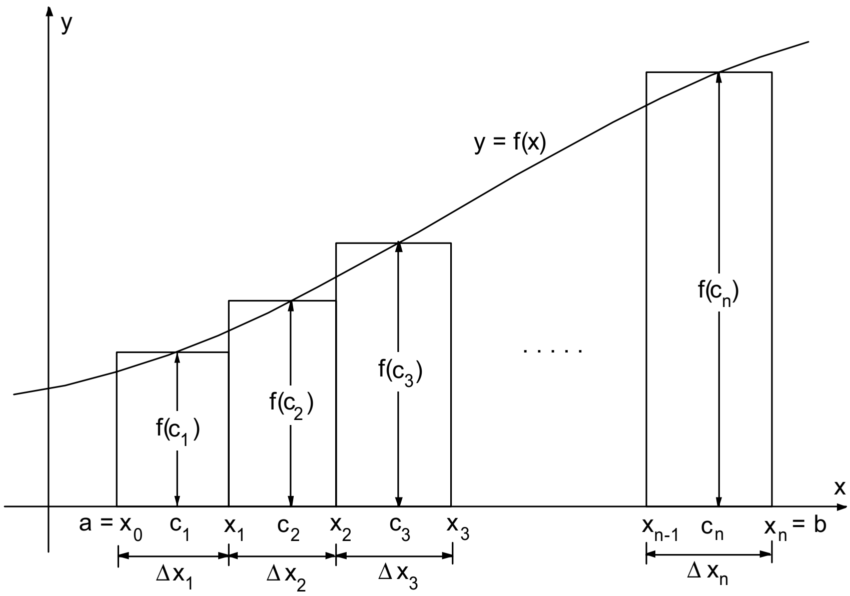


Figura 8.1.

Seja Δ o maior dos números Δx_1, Δx_2, $\ldots$, Δx_n. Escrevemos

$$\Delta = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\} = \max \Delta x_i$$

Tal Δ é também chamado de *norma da partição* $\wp$.

A *integral definida de f, de a até b* (ou *no intervalo* $[a, b]$) é o número real

$$\gamma = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta \to 0} S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Observação 8.1 *Se $f(x) > 0$ no intervalo $[a, b]$, quando $\max \Delta x_i \to 0$, o número k, de sub-intervalos tende a ∞.*

Os retângulos ilustrados na figura 8.1 tornam-se cada vez mais estreitos e numerosos à medida em que $\max \Delta x_i$ torna-se mais e mais próximo de 0.

Neste caso, $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ *definirá a área compreendida entre a curva* $y = f(x)$, *o eixo* x, *e as retas verticais* $x = a$, $x = b$.

Sumarizando,

Se $f(x) \geq 0$ *em* $[a, b]$, *então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (\text{área sob o gráfico de } f, \text{ de } x = a \text{ até } x = b)$$

Observação 8.2 *Por outro lado, se* $f(x) < 0$ *para todo* $x \in [a, b]$, *teremos* $\int_a^b f(x)\,dx = -A$, *sendo* A *a área (positiva) da região plana compreendida entre o eixo* x, *o gráfico de* f, *e as retas* $x = a$ *e* $x = b$.

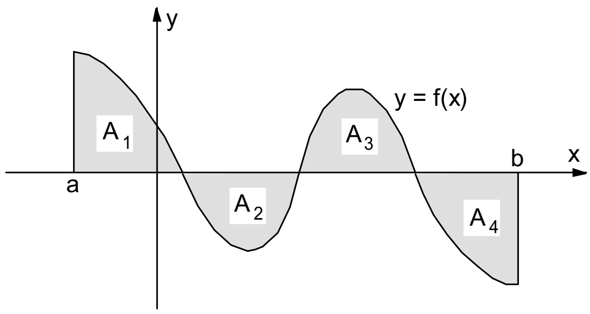


Figura 8.2. $\int_a^b f = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$.

Observação 8.3 *Se o gráfico de* f, *no intervalo* $[a, b]$, *é como o gráfico esboçado na figura 8.2, então, sendo* A_1, A_2, A_3 *e* A_4 *as áreas (positivas) indicadas na figura, teremos*

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

Assumiremos sem demonstração as seguintes propriedades.

Proposição 8.1 *Se* f *e* g *são contínuas em* $[a, b]$, *então, sendo* k *uma constante e* $a < c < b$,

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
2. $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$
3. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
4. *se* $f(x) \leq g(x)$, *para todo* $x \in [a, b]$, *então* $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Observação 8.4 *Sendo f contínua em $[a, b]$, são adotadas as seguintes convenções (definições).*

(i) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(ii) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Adotadas essas convenções, a proposição 8.1, acima enunciada, continua verdadeira qualquer que seja a ordem dos limites de integração a, b e c, podendo ainda dois deles (ou os três) coincidirem.

8.2 O teorema fundamental do cálculo

O teorema fundamental do cálculo estabelece o modo pelo qual as integrais definidas podem ser calculadas através de integrais indefinidas.

Teorema 8.1 (Teorema fundamental do cálculo) *Sendo f uma função contínua no intervalo $[a, b]$,*

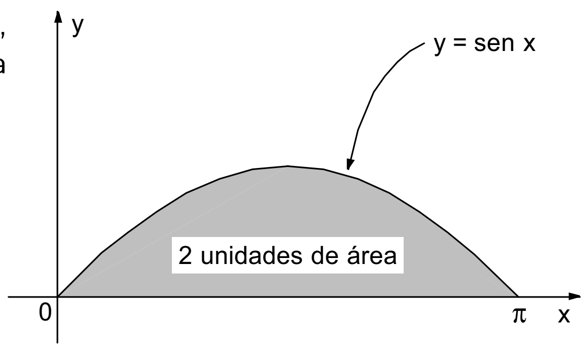
$$\text{se} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{então} \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

É costume denotar $[F(x)]_a^b = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.
Ou seja, sendo $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, temos $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemplo 8.1 *Calcular a área compreendida entre a curva $y = \operatorname{sen} x$ e o eixo x, para $0 \le x \le \pi$.*

Solução.
Como $\operatorname{sen} x \ge 0$ quando $0 \le x \le \pi$, temos que a área procurada é dada pela integral $A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$.

Temos $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.



Logo, $A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$ (unidades de área).

Exemplo 8.2 *Calcular* $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Fazendo $u = 1 + x^2$, calculamos $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2} + C$.

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{\sqrt{8}}{3} = 0.$

Exemplo 8.3 *Calcular a área delimitada pela circunferência de equação* $x^2 + y^2 = a^2$.

Para calcular a área A desse círculo, basta calcular a área sob o semi-círculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, acima do eixo x, entre os pontos $x = -a$ e $x = a$, ou seja, calcular

$$A/2 = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Em uma boa tabela de integrais indefinidas, encontramos:

$$\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\frac{A}{2} &= \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \\
&= \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-a}^{a} \\
&= \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen} 1 - \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}(-1) \\
&= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 2\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{2}
\end{aligned}$$

E portanto a área do círculo é $A = \pi a^2$.

8.3 Problemas

Calcule as integrais definidas listadas abaixo.

1. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$. $\boxed{\textit{Resposta. } \pi/2}$

2. $\int_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. $\boxed{\textit{Resposta. } \pi/4}$

3. $\int_{0}^{\pi/3} \operatorname{tg} x \, dx$. $\boxed{\textit{Resposta. } \ln 2}$

4. $\int_{1}^{x} \frac{dt}{t}$. $\boxed{\textit{Resposta. } \ln x}$

5. $\int_{0}^{x} \operatorname{sen} t \, dt$. $\boxed{\textit{Resposta. } 1 - \cos x}$

6. $\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx$. $\boxed{\textit{Resposta. } 1/3}$

7. $\int_{1}^{4} \frac{x \, dx}{\sqrt{2+4x}}$. $\boxed{\textit{Resposta. } 3\sqrt{2}/2}$

8. Calcule a integral $\int_0^t \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ $(0 \le t \le a)$, sem usar antiderivadas, interpretando-a como área sob a curva (semi-círculo) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, e acima do eixo x, no intervalo $[0, t]$ (figura 8.3).

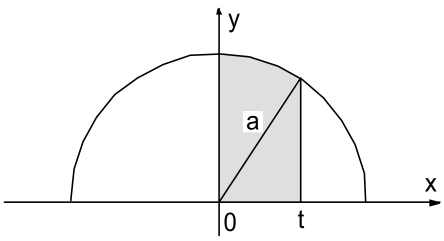


Figura 8.3.

Resposta. $\frac{t}{2}\sqrt{a^2 - t^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{t}{a}$.
Sugestão. Subdivida a área a ser calculada em duas regiões, como sugere a figura.