8.4 Aplicações selecionadas da integral definida

8.4.1 Área de uma região plana

Suponhamos que f e g são duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$, sendo $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Para $x \in [a, b]$, consideramos, apoiada à esquerda no ponto x, uma fatia retangular vertical, de base Δx, e altura $h(x) = f(x) - g(x)$, como na figura 8.4. A área dessa fatia será dada por $\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$.

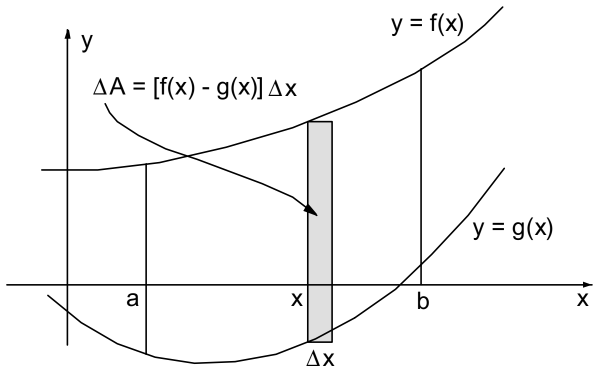

Figura 8.4.

Se subdividirmos o intervalo $[a, b]$ em vários sub-intervalos de comprimento Δx, e sobre cada um deles construírmos uma área ΔA, como acima, teremos a área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, dada aproximadamente por

$$\sum \Delta A = \sum [f(x) - g(x)]\Delta x$$

onde, pelo bem da simplicidade, estamos omitidindo índices do somatário.

A área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, será dada pelo limite de tais somas integrais, quando $\Delta x \longrightarrow 0$, ou seja, será dada por

$$\boxed{A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum [f(x) - g(x)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$$

Sendo $\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$, é costume simbolizar $dA = [f(x) - g(x)]dx$. Temos então $A = \int_a^b dA$.

É costume dizer que $dA = [f(x) - g(x)]\, dx$ é um *elemento infinitesimal de área*, de altura $f(x) - g(x)$, sobre um *elemento infinitesimal de comprimento* dx. O símbolo de integração, $\int$, provém da forma de um arcaico S, e tem o significado de "*soma* (veja isto: *ſoma*) de um número infinito de quantidades infinitesimais" . Assim, se $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)\,dx$ corresponde, grosso modo, a uma soma de "elementos infinitesimais de área", de alturas $f(x)$, e base dx, com x "variando" de a até b.

Exemplo 8.4 *Calcular a área delimitada pelas curvas* $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

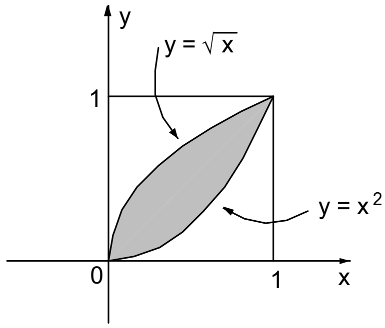

Figura 8.5.

Solução. As curvas dadas se interceptam em $x_0 = 0$ e em $x_1 = 1$ (soluções de $x^2 = \sqrt{x}$). Para $0 \leq x \leq 1$, temos $\sqrt{x} \geq x^2$. Veja figura 8.5.

Assim sendo, a área entre as duas curvas é dada por
$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]\,dx = \int_0^1 [x^{1/2} - x^2]\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

8.4.2 Média ou valor médio de uma função

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Em $[a, b]$ tomemos os $n + 1$ pontos igualmente espaçados

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

isto é, tais que

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \Delta x = \frac{b - a}{n}$$

A média aritmética dos $n+1$ valores $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, é dada por

$$\mu_n = \frac{f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n + 1}$$

Definiremos a média (ou valor médio) da função f, no intervalo $[a, b]$, como sendo

$$\bar{f} = \lim_{n \to \infty} \mu_n$$

É possível demonstrar que o valor médio da função $f(x)$, no intervalo $[a,b]$, é dado pela integral

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Exemplo 8.5 *Determine o valor médio de $f(x) = x^2$, no intervalo $a \le x \le b$.*

Solução. O valor médio de f em $[a,b]$, é dado por

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right)$$
$$= \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

8.4.3 Volume de um sólido

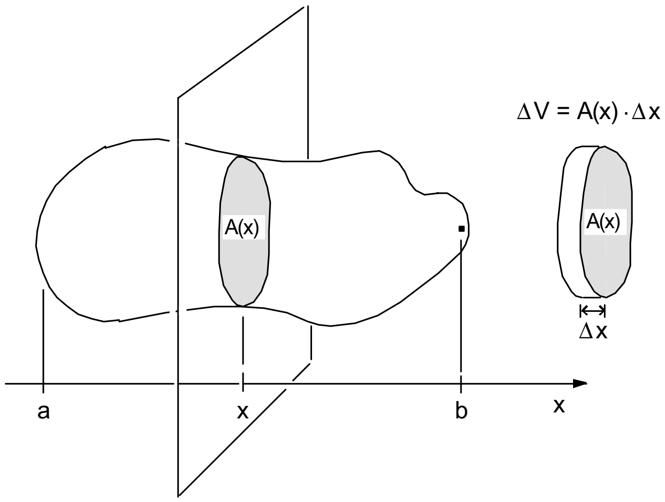

Figura 8.6.

Na figura 8.6, para cada x, $a \le x \le b$, um plano perpendicular a um eixo x corta um sólido (uma batata ?) determinando no sólido uma secção transversal de área $A(x)$. De $x = a$ até $x = b$, são determinadas as áreas de todas todas as secções transversais desse sólido, sendo $b - a$ o seu "comprimento". Qual é o seu volume ?

Suponhamos que o intervalo $[a,b]$ é subdividido em n sub-intervalos, todos de comprimento $\Delta x = (b-a)/n$.

Se x é um ponto dessa subdivisão, determina-se um volume de uma fatia "cilíndrica", de "base" com área $A(x)$ e "altura" Δx,

$$\Delta V = V(x) \cdot \Delta x$$

Uma aproximação do volume do sólido é dado pelo somatório desses vários volumes cilíndricos,

$$V \cong \sum \Delta V = \sum_x A(x) \cdot \Delta x$$

sendo o somatório aqui escrito sem os habituais índices i, para simplificar a notação. Quanto mais finas as fatias "cilíndricas", mais próximo o somatório estará do volume do sólido, sendo seu volume igual a

$$\boxed{V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \Delta V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum A(x) \cdot \Delta x = \int_a^b A(x)\, dx}$$

Os cientistas de áreas aplicadas costumam dizer que $dV = A(x) \cdot dx$ é um *elemento infinitesimal de volume*, construído sobre um ponto x, de um "cilindro" de área da base $A(x)$ e altura (espessura) "infinitesimal" dx. Ao "somar" os infinitos elementos de volume, temos $\int_a^b dV = \int_a^b A(x)\, dx$ igual ao volume do sólido.

Exemplo 8.6 *Qual é o volume de um tronco de pirâmide, de altura h, cuja base é um quadrado de lado a e cujo topo é um quadrado de lado b ?*

Solução. Posicionemos um eixo x perpendicular às duas bases. Cada ponto (altura) x, demarcada nesse eixo, corresponde, no tronco de pirâmide, a uma secção transversal quadrada, de tal modo que $x = 0$ corresponde à base quadrada de lado a, e $x = h$ corresponde ao topo quadrado de lado b. Veja figura 8.7.

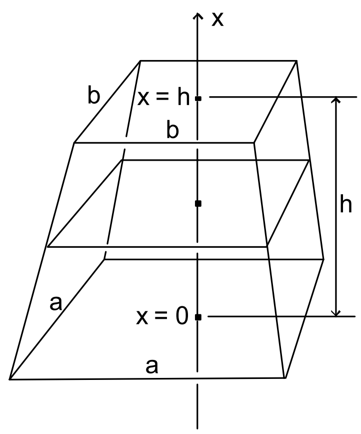

Figura 8.7.

Procurando uma função afim, $f(x) = mx + n$, tal que $f(0) = a$ e $f(h) = b$. encontramos $f(x) = a + \frac{b-a}{h}x$.

A área da secção transversal, na altura x, é dada por

$$A(x) = \left(a + \frac{b-a}{h}x\right)^2$$

O volume do tronco de pirâmide é então

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \left(a + \frac{b-a}{h}x\right)^2 dx$$

Fazendo $u = a + \frac{b-a}{h}x$, temos $du = \frac{b-a}{h}\,dx$. Além disso, $u = a$ para $x = 0$, e $u = b$ para $x = h$, e então

$$\begin{aligned} V = \int_0^h A(x)\,dx &= \frac{h}{b-a}\int_a^b u^2\,du \\ &= \frac{h}{b-a}\cdot\frac{u^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{h}{3(b-a)}(b^3-a^3) = \frac{h}{3}(a^2+ab+b^2) \end{aligned}$$

Note que o volume do tronco de pirâmide é $1/3$ do produto de sua altura pelo valor médio das áreas das secções transversais (veja exemplo 8.5). Conforme um antigo papiro, esta fórmula já era conhecida pela civilização egípcia do segundo milênio a.C.

Volume de um sólido de revolução

Quando rotacionamos uma região do plano xy em torno do eixo x ou do eixo y, realizando uma volta completa, o lugar geométrico descrito pelos pontos da região é o que chamamos um *sólido de revolução*.

Suponhamos que um sólido de revolução é obtido rotacionando-se, em torno do eixo x, uma região plana delimitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$.

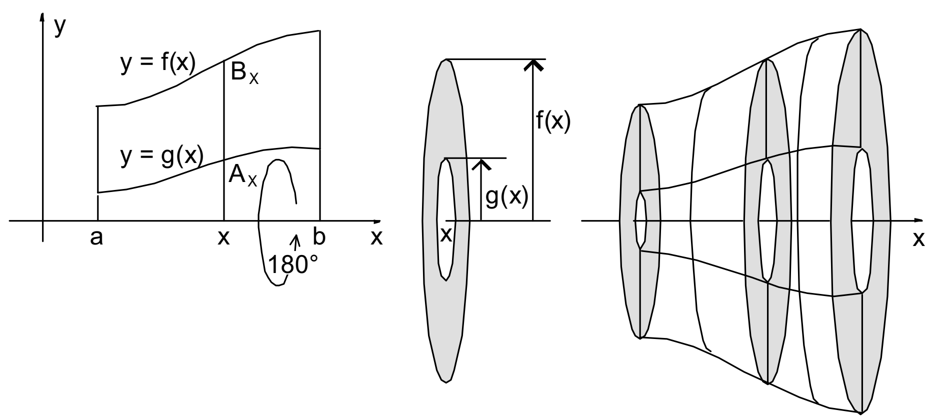

Figura 8.8.

Para cada $x \in [a, b]$, um plano perpendicular ao eixo x, cortando este no ponto x, determina no sólido de revolução uma secção transversal. Esta secção transversal é obtida pela revolução completa, em torno do eixo x, do segmento vertical A_xB_x, sendo $A_x = (x, g(x))$ e $B_x = (x, f(x))$. Veja figura 8.8

A área dessa secção transversal é a área de uma região plana compreendida entre dois círculos concêntricos de centro $(x, 0)$, sendo um menor, de raio $g(x)$, e outro maior, de raio $f(x)$. Como a área de um círculo de raio r é πr^2, temos que a área $A(x)$, da secção transversal do sólido de revolução, é dada por

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2$$

Portanto, o volume do sólido de revolução será

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b (\pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2)\,dx}$$

Se a região plana for delimitada pelo gráfico de $y = f(x)$, pelo eixo x, e pelas retas $x = a$ e $x = b$, teremos $g(x) = 0$, e então

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$

Exemplo 8.7 *Deduza que o volume de uma esfera de raio R é $\frac{4}{3}\pi R^3$.*

A esfera de raio R pode ser interpretada como o sólido obtido pela revolução da região semi-circular $x^2 + y^2 \le R^2$, $y \ge 0$, em torno do eixo x. Uma tal região é delimitada pelas curvas $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, e $y = 0$, com $-R \le x \le R$. Assim, aqui, $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ e $g(x) = 0$, sendo então

$$dV = A(x)\,dx = \pi[f(x)]^2\,dx = \pi(R^2 - x^2)\,dx$$

o elemento de volume a integrar.

Portanto,

$$\begin{aligned} V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx &= \pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} \\ &= \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

8.5 Problemas

Áreas de regiões planas

1. Calcule a área delimitada pelas curvas $y^2 = 9x$ e $y = 3x$. *Resposta.* $\mathbf{1/2}$
2. Calcule a área delimitada pelas curvas $xy = a^2$, $x = a$, $y = 2a$ $(a > 0)$ e o eixo x. *Resposta.* $a^2 \ln 2$
3. Calcule a área delimitada pela curva $y = x^3$, pela reta $y = 8$ e pelo eixo y. *Resposta.* 12

Valor médio de uma função contínua

Determine a média ou valor médio da função dada, no intervalo especificado.

1. $f(x) = x^2$, $a \leq x \leq b$. *Resposta.* $\bar{f} = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $a \leq x \leq b$ $(0 \leq a < b)$. *Resposta.* $\frac{2(a+b+\sqrt{ab})}{3(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

Volumes de sólidos de revolução

Em cada problema, calcule o volume do sólido obtido por revolução, conforme descrito.

1. A elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ gira em torno do eixo x. *Resposta.* $\frac{1}{3}\pi ab^2$
2. O arco de senóide $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$, gira em torno do eixo x. *Resposta.* $\pi^2/2$
3. A região delimitada pela parábola $y^2 = 4x$, pela reta $x = 4$ e pelo eixo x, gira em torno do eixo x. *Resposta.* 32π