AT3-1 - Unidade 3

Derivadas e Aplicações[1]

Cálculo Diferencial e Integral

Bacharelado em Sistemas de Informação

UAB - UFSCar

[1]Versão com 34 páginas

Tópicos de AT3-1

Tópicos de AT3-1

Para existir a derivada de uma função num ponto é necessário que:

primeiro tenha em mente a seguinte afirmação:

- Uma função para ter derivada na abscissa a precisa estar definida em a.

$$\boxed{f \text{ tem derivada em } a \Rightarrow a \text{ está no domínio de } f.}$$

Mas a recíproca da afirmação acima não vale em geral.
Pois, o fato de uma função estar definida em a, não garante em geral a existência da derivada em a.

Exemplo: a função $h(x) = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0; \\ x+1 & se \quad x < 0, \end{cases}$

está definida em todo $\mathbb{R}$, mas mesmo assim, h não tem derivada no zero. Por quê? A resposta a isso está no próximo slide, mas pense qual seria sua resposta. Faça o gráfico da função h com GeoGebra e coloque no forúm.

Continuação. Para uma função admitir derivada e a é necessário

ter em mente outras afirmações tais como:

- Uma função para ter derivada em a precisa ser contínua em a.

$$\boxed{\text{Assim, se } f \text{ admite derivada em } a \Rightarrow f \text{ é continua em } a.} \qquad (*)$$

- No slide anterior a função h não é contínua em 0, portanto, não admite derivada no 0.
- A reciprocamente desta afirmação $(*)$ não vale em geral.
  Pois, a continuidade de uma função em a não garante a existência da derivada da função em a.

Exemplo: a função módulo de x, $g(x) = |x|$, é continua em todo $\mathbb{R}$.

- Mesmo assim, a função $g(x) = |x|$ não tem derivada no 0. Porque?

Resposta. A função $g(x) = |x|$ tem um "bico" no ponto $(0, 0)$.

Este fato é fundamental, pois permitirá ver que em geral:

- uma função contínua f que tem um "bico" em $(a, f(a))$, não tem derivada em a.
- Para a curva $y = |x|$ existem as retas tangentes em todos os pontos da forma:

$$\boxed{(a, |a|) \text{ com } a < 0 \text{ ou } a > 0.}$$

Mas no ponto $(0, 0)$, a curva $y = |x|$ não tem reta tangente.

Este fato é também fundamental, pois permitirá concluir que:

- uma função f contínua em a que não tem reta tangente ao gráfico em $(a, f(a))$, não terá derivada em a.

Tópicos de AT3-1

Continuidade sem bicos.

- Uma função f admite uma derivada num ponto a do seu domínio, se e somente, se f é contínua em a e seu gráfico não tem um bico em $(a, f(a))$.

Exemplo

1. A função contínua $f(x) = x^2$, tem derivada em todo $a \in \mathbb{R}$, pois a função não têm "bicos".

Derivadas laterais

Investigue uma caraterização da derivada de uma função em a usando o conceito de derivadas laterais (tem a ver com limites laterais) coloque seus resultados no forúm.

Funções que possuem derivada

1. Com esta noção intuitiva de derivada podemos dizer que qualquer função constante, linear, polinomial, racional, trigonômetrica, logarítmica ou exponencial possuem derivada nos pontos interiores do domínio.

Notações

1. Em $y = f(x)$, y é a variável dependente e x é a variável independente. A notação $\dfrac{dy}{dx}$ da derivada de y em relação a x é devida a Leibniz. Esta notação é usada para indicar a derivada de f em relação à variável x. Assim

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

2. A notação $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ indicará a derivada de $\dfrac{dy}{dx}$ em relação a x, ou seja será usada para indicar a derivada da função que associa a cada x o valor $f'(x)$ nos caso que existe $f'(x)$. Assim, temos as seguintes notações para a derivadas de segunda ordem na variável x

$$y'' = (y')' = f''(x) = [f'(x)]' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

3. Discutir nos forúm com seus colegas e tutor sobre derivadas de ordem superior e dê exemplos.

Exemplos

Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $n \neq 0$ um natural. Então valem as seguintes fórmulas

1. $f(x) = k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$
3. $f(x) = x^{-n} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -nx^{-n-1}, \quad x \neq 0$
4. $f(x) = x^{1/n} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (1/n)x^{(1/n)-1}, \quad x > 0$ se n for par e $x \neq 0$, se n for impar $(n \geq 2)$.
5. $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$
6. $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$
7. $f(x) = \text{sen } x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$
8. $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\text{sen } x$

Tópicos de AT3-1

Derivada da soma, diferença, produto e quociente de funções deriváveis.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$. Então valem as seguintes propriedades:

1. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
2. $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$
3. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad v \neq 0$

Exemplo: verifique que $[\tan x]' = \sec^2 x$, onde $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.

Solução. $f(x) = \tan x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$, e $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, logo

$$f'(x) = [\tan x]' = \left(\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{[\text{sen } x]'\cos x - \text{sen } x[\cos x]'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Tópicos de AT3-1

Funções compostas $(f \circ g)'(x) = ?$

1. Se f e g são duas funções deriváveis com a imagem de g sendo um subconjunto do domínio de f, então a função composta $f \circ g$ é derivável nos pontos do domínio de g;
2. Como calcular a derivada da função composta $f \circ g$ num ponto x do domínio g? A resposta a é dada pela Regra da Cadeia

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g(x), \qquad x \in D(g).$$

3. Outra meneira de ver a Regra da Cadeia é a seguinte:

$$\text{se} \quad y = (f \circ g)(x) \quad \text{e} \quad u = g(x) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{(f \circ g)'(x)} = \underbrace{\frac{dy}{du}}_{f'(g(x))} \underbrace{\frac{du}{dx}}_{g'(x)}$$

Não pode simplificar os diferenciais du na Regra da Cadeia!

Exemplo 1: calcule a derivada de $y = (3x^2+1)^3$

1. Faça $f(x) = u^3$, onde $u = 3x^2+1$. Assim,

$$f'(x) = \frac{d(u^3)}{dx} = \underbrace{\frac{d(u^3)}{du}}_{\underbrace{3u^2}_{3(3x^2+1)^2}} \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\underbrace{\frac{d(3x^2+1)}{dx}}_{6x}} = 3(3x^2+1)^2 6x,$$

ou seja,

$$f'(x) = 18x(3x^2+1)^2.$$

Exemplo 2: Fórmulas que seguem do uso da regra da cadeia

Seja g uma função derivável. Então valem as seguintes fórmulas

1. $[e^{g(x)}]' = e^{g(x)}g'(x)$,
2. $[\ln g(x)]' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$,
3. $[\cos g(x)]' = -g'(x)\text{sen}\, g(x)$,
4. $[\text{sen} g(x)]' = -g'(x)\cos g(x)$,
5. $[(g(x))^n]' = n(g(x))^{n-1}g'(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$;
6. $[(g(x))^{1/n}]' = \dfrac{1}{n}(g(x))^{\frac{1}{n}-1}g'(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Exemplo 3: cálculo da derivada de $y = x^2 e^{3x}$ respeito da variável x

1. use o fato de ser um produto de funções e logo use a regra da cadeia, assim

$$y' = [x^2 e^{3x}]' = \underbrace{[x^2]'}_{2x} e^{3x} + x^2 \underbrace{[e^{3x}]'}_{e^{3x} \underbrace{[3x]'}_{3}} = 2xe^{3x} + x^2 e^{3x} 3$$

Portanto,

$$y' = (2x + 3x^2)e^{3x}$$

Tópicos de AT3-1

Exemplo 1: como calcular a derivada de $y = x^x \quad (*)$

1. Primeiro aplique logaritmo neperiano $\ln$ aos dois membros da equação $(*)$, obtemos

$$\ln y = \ln x^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = x \ln x \quad (**)$$

2. Segundo aplique exponencial $e^{()}$ aos dois membros da equação $(**)$, assim

$$\underbrace{e^{\ln y}}_{x^x} = e^{x \ln x} \quad \Rightarrow \quad x^x = e^{x \ln x} \quad (***)$$

3. agora derive aos dois membros da equação $(***)$ na variável x

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = e^{\ln(x^x)}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

4. finalmente

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

Exemplo 2: calcular a derivada de $y = 3^x$ relativa à variável x.

1. Como no caso do slide anterior pode começar do item 2 do exemplo 1, assim obterá a equação

$$3^x = e^{x \ln 3}$$

2. logo aplique o que foi feito no item 3 do slide anterior, ou seja derive a equação

$$(3^x)' = (e^{x \ln 3})' = e^{x \ln 3}(x \ln 3)' = e^{\ln(3^x)}(\ln 3) = 3^x \ln 3$$

Portanto,

$$\boxed{(3^x)' = 3^x \ln 3}$$

Tópicos de AT3-1

Exemplos 1: considere a equação $x^2 + y^2 = 1, \quad (*)$

que representa a circunferência centrada na origem e de raio 1.
Faça $y = f(x)$ e substituia na equação $(*)$, obtemos a equação

$$x^2 + (f(x))^2 = 1$$

que derivamos em ambos lados em função da variável x, assim

$$\underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 + (f(x))^2)}_{\underbrace{\frac{d}{dx}(x^2)}_{2x} + \underbrace{\frac{d}{dx}((f(x))^2)}_{2f(x)f'(x)}} = \underbrace{\frac{d}{dx}(1)}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad 2x + 2f(x)f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2f(x)f'(x) = -2x \Rightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{x}{f(x)}}$$

Desta forma conseguimos determinar a derivada da função $f(x)$ de forma implícita. Ou seja sem ter uma fórmula explícita que a define.

Exemplo 2: vamos calcular a derivada da função $y = \text{arcosen}\, x, \quad (*)$

1. Observe na calculadora ou no GeoGebra que para valores $x \in [-1, 1]$ existe um único valor $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, tal que $\text{sen}\, y = x$, esta equação define implicitamente uma função denominada função arco-seno e é indicada por $y = \text{arcosen}\, x$. Assim,

$$\text{sen}\, y = x \quad \Leftrightarrow \quad y = \text{arcosen}\, x$$

2. O domínio da função arcosen é o intervalo $[-1, 1]$.
3. A imagem da função arcosen é o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.
4. A derivada da função $y = \text{arcosen}\, x$ é dada por

$$(\text{arcosen}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad -1 < x < 1.$$

No forúm justifique por que a derivada de $\text{arcosen}\, x$ é dada assim. Dica derive implicitamente a equação $\text{sen}\, y = x$ em função de x e use o fato que $\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}^2\, y}$.

Tópicos de AT3-1

Cálculo das retas tangentes e normais, e dos limites indeterminados

A seguir daremos um par de aplicações para que serve a derivada de uma função, as outras aplicações serão abordadas nos forúm sobre aplicações de derivadas onde incluimos máximos e mínimos.

1. A primeira aplicação é para calcular as retas tangentes e normais ao gráfico da função.
2. A outra aplicação é para calcular límites indeterminados usando a Regra de L'Hopital.

Reta tangente ao gráfico de uma função

1. Se f é uma função derivável em x_0. Sabemos que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = m_t$$

onde m_t é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ que é dada por

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)} (*)$$

A reta tangente a $f(x) = x^2 - x$ no ponto $(2, f(2))$ é $y = 3x - 4$?

Solução. Sim, pois ao aplicar a fórmula da reta tangente $(*)$, obtemos

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = 3(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 4$$

pois $f'(x) = (x^2 - x)' = 2x - 1 \ \Rightarrow \ f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ e $f(2) = 2$.

Reta normal ao gráfico de uma função

- A reta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, é a reta perpendicular à reta tangente a f no ponto $(x_0, f(x_0))$.
  A inclinação da reta tangente m_t pela inclinação da reta normal m_n verificam
  $$m_t \cdot m_n = -1.$$
  Portanto, temos dois casos:
  1. quando $m_t = f'(x_0) \neq 0$, temos que $m_n = -\dfrac{1}{m_t} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, logo a equação da reta nomal a f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por
  $$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)} (**)$$
  2. quando $m_t = f'(x_0) = 0$, neste caso a reta normal é dada por
  $$\boxed{\underbrace{x = x_0}_{\text{equação da reta normal pois a reta tangente é } y=f(x_0)}}$$

A reta normal a $f(x) = x^2 - x$ no ponto $(2, f(2))$ é $y = -\frac{1}{3}x - 4$?

Solução. Como $f'(2) = 3 \neq 0$, podemos aplicar a fórmula da reta normal $(**)$, obtemos

$$y - f(2) = -\frac{1}{f'(2)}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -13(x-2)$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x - 4.$$

Atividade com GeoGebra

Realice uma atividade no GeoGebra para visualização das retas tangentes e nomais de outras funções como $f(x) = -2e^{x^2}$ (exponenciais), $g(x) = \ln\sqrt{x}$ (logarítmicas), $h(x) = \operatorname{sen}(\cos(x))$ (trigonométricas) no ponto de abscissa $x_0 = \frac{1}{2}$.

Tópicos de AT3-1

A 1^a. Regra de L'Hopital se aplica nas seguintes condições abaixo:

1. Sejam f e g deriváveis em $A =]p-r, p[\cup]p, p+r[$ para algum $r > 0$ e com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Nestas condições, se

   Se $\lim\limits_{x \to p} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to p} g(x)$ e se existe o limite $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

   então podemos afirmar que existe o limite:

$$\boxed{\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

   Esta regra continua valendo se substituirmos $x \to p$ por $x \to p^+$ ou por $x \to p^-$ ou por $x \to \pm\infty$.

Exemplo. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-6x^3+8x-3}{x^4-1}$?

1. $f(x)=x^5-6x^3+8x-3$ e $g(x)=x^4-1$ são deriváveis em $A=]0.999, 1.001[-\{1\}$ e $g'(x)=(x^4-1)'=4x^3\neq 0$ em A.

   Mas $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-6x^3+8x-3}{x^4-1}=\dfrac{1^5-6\cdot 1^3+8\cdot 1-3}{1^4-1}=\dfrac{0}{0}$

   é um limite indeterminado. Mas, temos que $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

   Pois, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^5-6x^3+8x-3)'}{(x^4-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^4-18x^2+8}{4x^3}=\frac{2\cdot 1^4-18\cdot 1^2+8}{4\cdot 1^3}=\frac{-5}{4}$.
   Assim, pelo 1^a. regra de L'Hopital concluimos que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-6x^3+8x-3}{x^4-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^5-6x^3+8x-3)'}{(x^4-1)'}=\frac{-5}{4}.$$

A 2^a. Regra de L'Hopital se aplica nas seguintes condições abaixo:

1. Sejam f e g deriváveis em $]m, p[$ com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Nestas condições se

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to p} g(x) = +\infty \text{ e se existe o limite } \lim_{x \to p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

então podemos afirmar que existe o limite:

$$\boxed{\lim_{x \to p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Esta regra continua valendo se subtituirmos $x \to p$ por $x \to p^+$ ou por $x \to p^-$ ou por $x \to \pm\infty$. A regra permanece válida se ainda trocamos um dos símbolos $+\infty$, ou ambos, por $-\infty$.

Exemplo $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x-1} = +\infty$

1. Sejam $f(x) = e^x$ e $g(x) = 2x+1$ claramente são deriváveis em $A =]30, +\infty[$ e $g'(x) = 2x \neq 0$ para todo $x \in A$. Mas

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x+1} = \frac{+\infty}{2\cdot(+\infty)+1} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

é um limite indeterminado, mas existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Pois, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x)'}{(2x-1)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{+\infty}{2} = +\infty$.

Assim, pelo 1^a. regra de L'Hopital concluimos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$