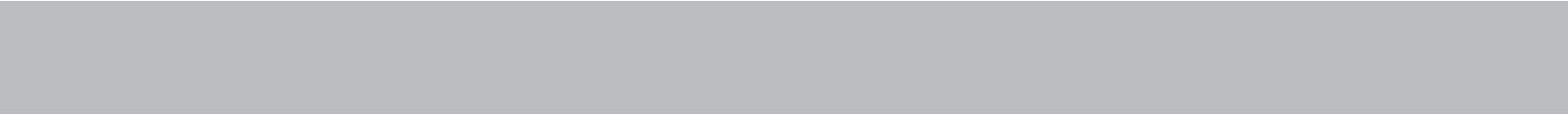


Introdução à Mecânica Aplicada à Engenharia e à Mecânica dos Sólidos



**Reitor**

Targino de Araújo Filho

Vice-Reitor

Adilson J. A. de Oliveira

Pró-Reitora de Graduação

Claudia Raimundo Reyes

**Secretária Geral de Educação a Distância - SEaD**

Aline Maria de Medeiros Rodrigues Reali

Coordenação SEaD-UFSCar

Daniel Mill

Glauber Lúcio Alves Santiago

Marcia Rozenfeld G. de Oliveira

Sandra Abib

Coordenação UAB-UFSCar

Daniel Mill

Sandra Abib

Coordenador do Curso de Engenharia Ambiental

Ruy de Sousa Júnior

UAB-UFSCar

Universidade Federal de São Carlos

Rodovia Washington Luís, km 235

13565-905 - São Carlos, SP, Brasil

Telefax (16) 3351-8420

www.uab.ufscar.br

uab@ufscar.br

**EdUFSCar****Conselho Editorial**

Ana Claudia Lessinger

José Eduardo dos Santos

Marco Giulietti

Nivaldo Nale

Oswaldo Mário Serra Truzzi (Presidente)

Roseli Rodrigues de Mello

Rubismar Stolf

Sergio Pripas

Vanice Maria Oliveira Sargentini

EdUFSCar

Universidade Federal de São Carlos

Rodovia Washington Luís, km 235

13565-905 - São Carlos, SP, Brasil

Telefax (16) 3351-8137

www.editora.ufscar.br

edufscar@ufscar.br

Sydney Furlan Junior

Introdução à Mecânica Aplicada à Engenharia e à Mecânica dos Sólidos

São Carlos



EdUFSCar

2015

© 2011, Sydney Furlan Junior

Concepção Pedagógica

Daniel Mill

Supervisão

Douglas Henrique Perez Pino

Revisão Linguística

Clarissa Galvão Bengtson

Daniel William Ferreira de Camargo

Kamilla Vinha Carlos

Paula Sayuri Yanagiwara

Rebeca Aparecida Mega

Diagramação

Izís Cavalcanti

Juan Toro

Vagner Serikawa

Capa e Projeto Gráfico

Luís Gustavo Sousa Sguissardi

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

F985i	Furlan Junior, Sydney. Introdução à mecânica aplicada à engenharia e à mecânica dos sólidos / Sydney Furlan Junior. -- São Carlos : EdUFSCar, 2011. 143 p. -- (Coleção UAB-UFSCar).
	ISBN – 978-85-7600-260-4
	1. Mecânica. 2. Equilíbrio. 3. Força (mecânica). 4. Tensão. 5. Deformação. I. Título.
	CDD – 531 (20 ^a) CDU – 621

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra pode ser reproduzida ou transmitida por qualquer forma e/ou quaisquer meios (eletrônicos ou mecânicos, incluindo fotocópia e gravação) ou arquivada em qualquer sistema de banco de dados sem permissão escrita do titular do direito autoral.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	9
---------------------------	---

UNIDADE 1: Introdução à Mecânica Aplicada

1.1 Primeiras palavras	13
1.2 Problematizando o tema	13
1.3 Conceitos básicos	13
1.4 Unidades	14
1.5 Considerações finais	15

UNIDADE 2: Equilíbrio de uma partícula

2.1 Primeiras palavras	19
2.2 Problematizando o tema	19
2.3 Soma de forças	19
2.4 Equilíbrio de uma partícula	23
2.5 Considerações finais	31

UNIDADE 3: Equilíbrio de corpos rígidos

3.1 Primeiras palavras	35
3.2 Problematizando o tema	35

3.3	Momento de uma força.....	36
3.4	Equilíbrio de corpos rígidos.....	41
3.4.1	Reações de apoios (bidimensional)	41
3.4.2	DCL.....	43
3.4.3	Equações de equilíbrio	44
3.4.4	Estruturas indeterminadas e parcialmente vinculadas	48
3.4.5	Corpos com cargas distribuídas.....	49
3.4.6	Idealização de modelos.....	50
3.5	Análise de estruturas.....	54
3.5.1	Síntese da análise de estruturas.....	63
3.6	Considerações finais	64

UNIDADE 4: Centroides e momentos de inércia

4.1	Primeiras palavras	67
4.2	Problematizando o tema.....	67
4.3	Centroide de figuras planas	68
4.3.1	Cálculo do centroide por integração.....	69
4.3.2	Simetria	73
4.3.3	Figuras compostas.....	73
4.3.4	Outras aplicações	75
4.4	Momento de inércia.....	77
4.4.1	Cálculo por integração	78
4.4.2	Teorema dos eixos paralelos.....	80
4.4.3	Momento de inércia de figuras compostas.....	81

4.5 Figuras contidas num plano yz84
4.6 Considerações finais84

UNIDADE 5: Introdução à mecânica dos sólidos

5.1 Primeiras palavras87
5.2 Problematizando o tema.....	.87
5.3 Tensão87
5.4 Deformação.....	.88
5.5 Material.....	.89
5.6 Segurança da estrutura.....	.89
5.7 Considerações finais89

UNIDADE 6: Esforços solicitantes em estruturas planas isostáticas

6.1 Primeiras palavras93
6.2 Problematizando o tema.....	.93
6.3 Esforços solicitantes93
6.3.1 Convenções de sinais95
6.4 Classificação da estrutura95
6.5 Relações entre momento fletor M, força cortante V e carga distribuída p.....	.96
6.6 Considerações finais101

UNIDADE 7: Barras submetidas à força normal

7.1 Primeiras palavras	105
7.2 Problematizando o tema	105
7.3 Tensões e deslocamentos longitudinais	105
7.3.1 Tensão normal	106
7.3.2 Diagramas tensão x deformação	106
7.3.3 Deslocamento longitudinal	107
7.4 Considerações finais	119

UNIDADE 8: Flexão de barras de seção simétrica

8.1 Primeiras palavras	123
8.2 Problematizando o tema	123
8.3 Tensão normal	123
8.4 Tensão de cisalhamento	125
8.4.1 Momento estático dos pontos da fibra (j) em relação ao eixo z	127
8.5 Deformação por flexão	128
8.6 Considerações finais	139

REFERÊNCIAS	141
--------------------------	-----

APRESENTAÇÃO

Caro leitor, esta publicação irá auxiliar na introdução ao tema *Mecânica Aplicada e dos Sólidos*. Nos cursos de Engenharia, conteúdos como *Mecânica Aplicada* e *Introdução à Mecânica dos Sólidos Deformáveis* introduzem o leitor na importante tarefa do cálculo estrutural. Eles têm caráter básico e exigem sólida base conceitual. A observação, o raciocínio lógico e coerente, a estruturação de ideias e dos conceitos envolvidos nos cálculos são amplamente exercitados.

Este texto reúne parte importante do conteúdo desses dois tradicionais campos, que se encadeiam naturalmente. Para cada tema, há uma parte teórica, na qual são desenvolvidos os conceitos físicos e a dedução matemática das principais equações, e uma parte de exercícios resolvidos, com aplicação do conteúdo e discussão dos resultados. Em alguns capítulos, se propõem exercícios para treinar e avaliar a aprendizagem.

Os temas aqui abordados são: equilíbrio de ponto material; equilíbrio de corpos rígidos; análise de estruturas compostas; centroides e momentos de inércia de figuras planas; esforços solicitantes em estruturas isostáticas planas; barras prismáticas submetidas à força normal; e flexão de barras de seção simétrica.

O seu aprendizado depende fundamentalmente de treinamento, ou seja, da resolução de muitos problemas, em que se aprimoram o modelo idealizado, o modo de abordagem e a aplicação do equacionamento que conduz às respostas desejadas.

A despeito das possíveis falhas e das limitações deste texto, espero que você, caro leitor, tenha uma atitude de boa vontade, paciência e persistência na busca de condições favoráveis à reflexão dos assuntos discutidos e à incorporação de habilidades indispensáveis no exercício da engenharia.

Agradeço-lhe antecipadamente pelas críticas e sugestões.

UNIDADE 1

Introdução à Mecânica Aplicada

1.1 Primeiras palavras

A Mecânica é uma ciência física dedutiva que estuda as condições de repouso ou movimento de corpos sob a ação de forças. Ela se baseia em poucos conceitos fundamentais. A mecânica aplicada aos corpos rígidos, especialmente a parte da estática (equilíbrio), é base para projeto e análise de componentes estruturais e mecânicos da engenharia. Além disso, é requisito para estudar a mecânica dos sólidos deformáveis. Nesta unidade são introduzidos os princípios básicos e algumas idealizações utilizadas, assim como as unidades e a precisão desejada nos cálculos.

1.2 Problematizando o tema

Um corpo rígido é um conjunto de partículas agrupadas que mantêm suas posições fixas, independentemente da ação de forças. O corpo rígido é uma idealização, pois os corpos são deformáveis sob ação de forças. Entretanto, na engenharia, as deformações são pequenas. Elas praticamente não alteram as condições de equilíbrio. Dessa forma, as propriedades dos materiais não interferem na análise das forças.

Na mecânica aplicada aos corpos rígidos, o objetivo principal é analisar problemas de equilíbrio de um modo simples e lógico, aplicando alguns poucos conceitos básicos em modelos idealizados para representar uma situação real.

1.3 Conceitos básicos

Na mecânica, empregam-se quatro conceitos ou quantidades básicos, todos de natureza intuitiva:

- Espaço ou comprimento: localização de um ponto ou definição de dimensões;
- Tempo: sucessão de eventos;
- Força: empurrão/puxão de um corpo sobre outro, com ou sem contato;
- Massa: medida da resistência à mudança de velocidade.

O estudo do equilíbrio de partículas, corpos rígidos ou sistemas de corpos rígidos se baseia em alguns princípios fundamentais, necessários e suficientes, formulados segundo observações experimentais:

- a) Lei do paralelogramo para adição de forças: duas forças atuantes numa partícula podem ser substituídas por sua resultante, representada pela diagonal do paralelogramo cujos lados são as forças a serem somadas;
- b) Princípio da transmissibilidade: os efeitos de uma força em relação ao estudo do equilíbrio não se alteram com o seu ponto de aplicação, dependendo apenas de sua linha de ação;
- c) As três Leis de Newton:
 - c1) se a força resultante numa partícula é nula, ela permanece com sua velocidade constante – em repouso, se inicialmente parada;
 - c2) quando a força resultante numa partícula não é nula, ela se move com aceleração proporcional à força, na mesma direção da força;
 - c3) forças de ação e reação entre dois corpos em contato têm o mesmo valor e direção mas sentidos opostos.

Didaticamente, separam-se os casos de equilíbrio de partícula e corpo rígido. A partícula é a idealização de uma porção muito pequena de matéria, com massa, mas de dimensão desprezível, que ocuparia apenas um ponto no espaço. Assim, a geometria do corpo não interfere no estudo do equilíbrio, o que resulta numa análise muito mais simples. O conceito de equilíbrio de partícula se aplica também a inúmeras situações de forças concorrentes atuantes num sistema de corpos rígidos.

Outra idealização frequente ocorre quando uma força atua em uma área muito pequena se comparada com as dimensões do corpo em estudo. Nesses casos, considera-se que a força seja concentrada no ponto.

Um modo muito eficiente de entender os conceitos da mecânica é por meio da resolução de problemas: relaciona-se a situação real com modelos teóricos compatíveis, expressando-os por meio de diagramas que contêm os dados usados no equacionamento matemático do equilíbrio.

1.4 Unidades

As unidades empregadas neste texto são as do Sistema Internacional. Para as principais grandezas, temos:

- Espaço: metro (m);
- Tempo: segundo (s);
- Massa: quilograma (kg);

- Força: Newton (N);
- Tensão: Pascal (Pa).

As três primeiras são unidades básicas. Define-se 1 N como a força necessária para imprimir aceleração de 1 m/s^2 a um corpo de massa igual a 1 kg. 1 Pa é a tensão exercida por uma força de 1 N numa área de 1 m^2 . Também é usual empregar prefixos quando trabalhamos com números muito grandes. Por exemplo: $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 0,1 \text{ kN/cm}^2$.

Na realização dos cálculos, frequentemente você ficará em dúvida sobre a quantidade de algarismos a empregar ou a exatidão desejada. Como regra geral, a precisão não deve ser maior que o menos preciso dos dados do problema. Assim, devem-se arredondar os números obtidos nos cálculos. Em problemas de engenharia, normalmente é suficiente trabalhar com três algarismos significativos na resposta final, efetuando cálculos intermediários com um algarismo significativo a mais e mantendo, assim, uma precisão da ordem de pelo menos 1%.

Um algarismo significativo é todo algarismo – zero, inclusive – não utilizado para localização da vírgula. Por exemplo: os números 1,85; 0,678; 21,3 e 125 têm três algarismos significativos.

E o número 3500? Quantos algarismos significativos têm? Depende da circunstância. Ele pode ter dois, três ou quatro. Para não restar dúvida nesses casos, ele deve ser escrito empregando potências de 10 – em notação de engenharia, as potências são múltiplas de 3. Caso se queira escrevê-lo com dois algarismos significativos, deve-se usar $3,5 \cdot 10^3$; com três, $3,50 \cdot 10^3$, e assim sucessivamente.

1.5 Considerações finais

A mecânica aplicada aos corpos rígidos estuda suas condições de repouso ou movimento. A mecânica dos sólidos estuda os corpos deformáveis – tensões e deformações.

Um corpo rígido não se deforma quando carregado. Forças que atuam numa área muito reduzida são consideradas concentradas num ponto.

No Sistema Internacional, as unidades empregadas são metro (m), segundo (s), quilograma (kg), Newton (N) e Pascal (Pa). Nos cálculos, procura-se dar as respostas com pelo menos três algarismos significativos.

UNIDADE 2

Equilíbrio de uma partícula

2.1 Primeiras palavras

A condição necessária e suficiente para garantir o equilíbrio de uma partícula é que a resultante das forças que nela atuam seja nula. Assim, é fundamental aprender a somar forças para calcular a força resultante num ponto. Esses conceitos serão desenvolvidos ao longo desta unidade. Mostrar-se-á, ainda, que o conceito de equilíbrio de uma partícula ou ponto material pode ser empregado na solução de inúmeros problemas reais, e que a construção do Diagrama do Corpo Livre (DCL) é uma etapa fundamental na resolução dos exercícios.

2.2 Problematizando o tema

Dado o caráter fundamental e introdutório da proposta deste livro, serão estudados apenas os casos de equilíbrio no plano – forças atuantes coplanares. Nessa situação, é comum e suficiente o emprego de álgebra ordinária.

Apesar dessa limitação, o estudo do equilíbrio no plano engloba grande parte dos problemas práticos da engenharia. Mesmo sabendo que as situações são quase sempre tridimensionais – afinal, a vida ocorre em três dimensões –, é comum analisar seções planas que são representativas de um problema real, com forças atuantes contidas nesse plano, tratando o problema de forma bidimensional.

Além disso, o equilíbrio de partícula não se limita ao estudo de corpos de dimensão reduzida, mas se aplica a todos os casos em que o tamanho e o formato dos corpos não afetam significativamente o equacionamento, ou a qualquer sistema em que todas as forças sejam concorrentes num mesmo ponto.

2.3 Soma de forças

A força é uma grandeza vetorial. Um vetor não fica completamente definido apenas pelo seu valor (módulo), como ocorre com uma grandeza escalar: massa, tempo etc. Para sua completa caracterização, é necessário também conhecer sua direção e sentido. Assim, os efeitos de uma força dependem da sua intensidade (módulo do vetor força), da direção e sentido de atuação.

A soma de forças deve sempre ser efetuada vetorialmente. Entretanto, a notação vetorial não é obrigatória, pois a operação vetorial pode ser feita por meio de várias operações algébricas. O uso da álgebra vetorial na mecânica é particularmente importante nos casos tridimensionais, quando facilita bastante o equacionamento matemático.

Serão, então, estabelecidos os procedimentos para somar forças atuantes num mesmo plano. Essa operação pode ser feita gráfica ou numericamente. Na solução dos problemas, sempre se prefere o cálculo numérico, mais preciso.

Considere, por exemplo, o caso de duas forças atuantes num ponto O. A resultante dessas forças pode ser obtida graficamente, sendo igual à diagonal do paralelogramo formado pelas forças, conforme a Figura 2.1.

O mesmo se obterá se for utilizada a regra do triângulo, situação em que se representa a segunda força a partir da extremidade da seta da primeira. Nesse caso, a resultante corresponde ao lado que completa o triângulo.

Empregando relações trigonométricas do triângulo formado por essas duas forças, podem-se obter numericamente o valor da diagonal (lei dos cossenos) e sua direção (lei dos senos), como se mostra a seguir:

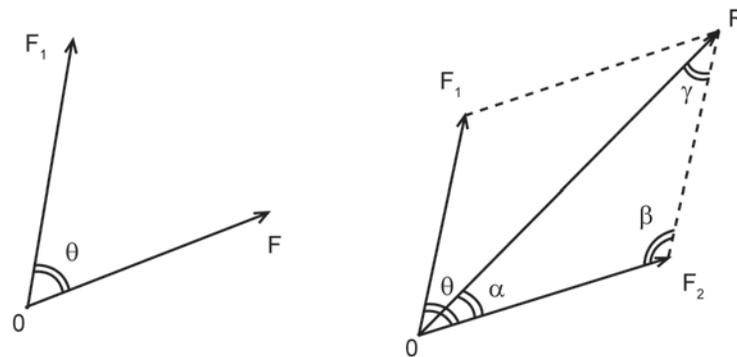


Figura 2.1 Representação de dois vetores-força e solução gráfica.

$$R = (F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \beta)^{0,5} \quad (2.1)$$

$$F_1 / \sin \alpha = F_2 / \sin \gamma = R / \sin \beta \quad (2.2)$$

Observe a situação mostrada na Figura 2.2. Conhecendo as forças F_a e F_b que as correntes a e b aplicam no gancho, pode-se calcular a resultante dessas forças (F_c) com a regra do paralelogramo. Analogamente, se a força F_c atuante no gancho for conhecida, suas componentes F_a e F_b poderão ser determinadas pela mesma regra:

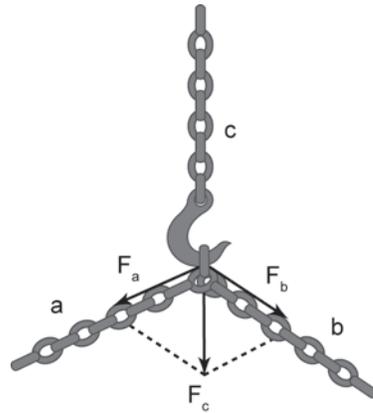


Figura 2.2 Exemplo de soma de duas forças pela lei do paralelogramo.

Caso haja mais de duas forças a serem adicionadas, aplica-se sucessivamente a regra do triângulo – solução gráfica – ou a lei de senos e cossenos – solução numérica. A aplicação sucessiva da regra do triângulo para a solução gráfica resulta na regra do polígono: desenham-se sucessivamente as forças, tendo como início do vetor-força a extremidade final da seta da força anterior. O fechamento do polígono representa a resultante das forças:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \quad (2.3)$$

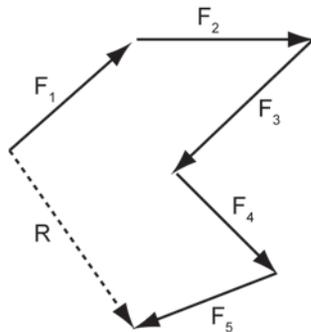


Figura 2.3 Regra do polígono para a soma de várias forças: solução gráfica.

Entretanto, a maneira mais prática e eficiente de somar forças é por meio da decomposição de cada uma em suas componentes cartesianas (F_x e F_y). A decomposição de uma força em componentes é, na verdade, a operação inversa da soma. Assim, uma força pode ser decomposta segundo duas componentes de direções quaisquer. Escolhem-se sempre as direções ortogonais x e y , pois isso resulta num equacionamento matemático mais simples – relações trigonométricas do triângulo retângulo, Figura 2.4a).

Por exemplo: para a soma de duas forças, decompõe-se cada uma em componentes F_x e F_y (Figura 2.4b)). A resultante será obtida a partir da soma algébrica das componentes em cada direção. Se houver interesse em calcular o valor da

resultante e sua direção – em vez de representá-la pelas componentes –, bastará resolver a geometria do triângulo retângulo formado por F_x e F_y :

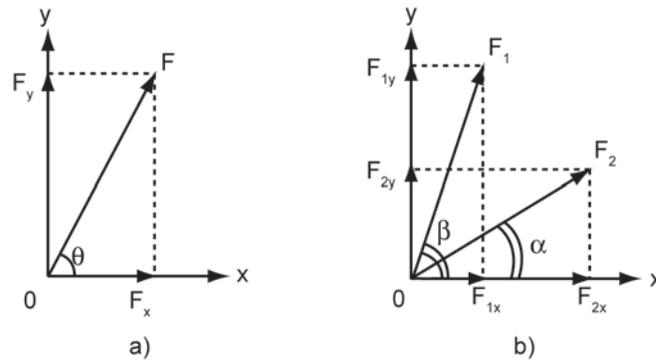


Figura 2.4 Soma de forças pela decomposição em componentes retangulares.

$$F_x = F \cdot \cos \theta; \quad F_y = F \cdot \text{sen} \theta \quad (2.4)$$

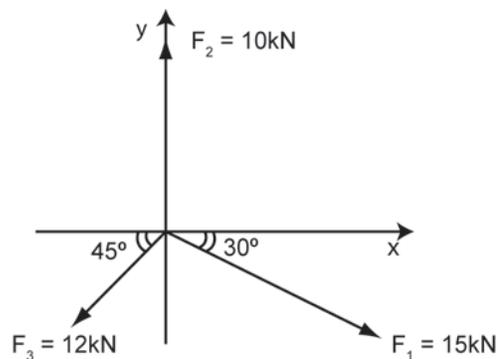
$$R = (F_{1x} + F_{2x}) + (F_{1y} + F_{2y}) = R_x + R_y \quad (2.5)$$

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 \quad (2.6)$$

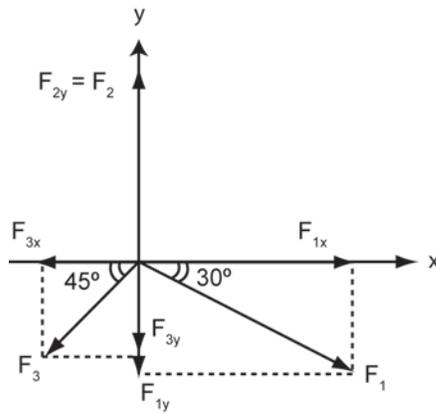
$$\text{tg} \theta = R_y / R_x \quad (2.7)$$

Caso haja mais de duas forças, a situação será análoga, repetindo-se o procedimento de decomposição para cada força.

Problema 2.1 Calcule a força resultante no sistema formado pelas três forças aplicadas no ponto 0:



Solução: a resultante será calculada a partir da soma das suas componentes cartesianas, considerando os sinais conforme orientação relativa aos eixos x e y adotados:



$$R_x = F_1 \cdot \cos 30 - F_3 \cdot \cos 45 \text{ (observe que } F_2 \text{ não possui componente na direção x)}$$

$$R_y = -F_1 \cdot \sin 30 + F_2 - F_3 \cdot \sin 45$$

Substituindo os valores das forças, obtém-se:

$$R_x = 4,51 \text{ kN (para a direita)}$$

$$R_y = -5,99 \text{ kN (para a esquerda)}$$

Para obter o valor da resultante R e sua direção, basta aplicar o Teorema de Pitágoras e uma relação trigonométrica do triângulo retângulo:

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 \quad R = 7,50 \text{ kN}$$

$$\text{tg} \theta = R_y / R_x \quad \theta = 53^\circ \text{ (em relação ao eixo horizontal)}$$

2.4 Equilíbrio de uma partícula

Conforme a Primeira Lei de Newton, se a resultante de todas as forças que atuam numa partícula for nula, a partícula ficará em equilíbrio, caso esteja originalmente em repouso.

Portanto, se uma partícula em equilíbrio estiver sujeita à ação de apenas duas forças, necessariamente elas terão a mesma intensidade e direção, porém com sentidos opostos.

O conceito de equilíbrio de uma partícula pode ser empregado na solução de inúmeros problemas. A construção do DCL (Diagrama do Corpo Livre) é fundamental na resolução dos exercícios. Escolhe-se um corpo (ou uma parte) da situação real para análise e equacionamento do equilíbrio, isolando-o do seu entorno e mostrando todas as forças que nele atuam.

As forças nesse corpo, conhecidas e desconhecidas, são aplicadas por outros corpos, normalmente pelas partes que se ligavam a ele na situação original. Assim, não se representam no DCL de um corpo as forças que ele exerce, mas as forças que ele recebe.

Quando uma estrutura ou um conjunto de corpos está em equilíbrio, todos os seus integrantes estão em equilíbrio. A escolha da parte do problema a ser estudada deve atender a uma premissa básica: precisa conter os dados necessários para a solução e possibilitar o equacionamento que permite obter a resposta desejada.

Às vezes, essa parte se reduz a um ponto ou partícula para o qual convergem várias forças. No DCL de uma partícula, aparecem as forças ativas, que tendem a movimentar a partícula, e as reativas, decorrentes dos apoios ou restrições que tendem a impedir o movimento.

Grande parte das aplicações do equilíbrio de partícula ocorre quando se tem fios interligados. Normalmente, o fio é considerado idealmente inextensível – sem deformação – e de peso desprezível. Ele só pode ser tracionado (esticado), caso contrário perderá sua forma original. Ou seja, a direção da força num fio é sempre conhecida, assim como o sentido, correspondente ao esforço de tração. Desprezando o atrito, sempre se considera que a força num fio é constante ao longo do comprimento.

Na solução analítica dos problemas de partícula sujeita a forças coplanares, duas equações algébricas bastam para garantir o equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 \quad \text{e} \quad \sum F_y = 0 \quad (2.8)$$

Assim, para que o problema seja determinado, pode haver apenas duas incógnitas: qualquer direção (ângulo) ou valor de uma força, entre as mostradas no DCL da partícula.

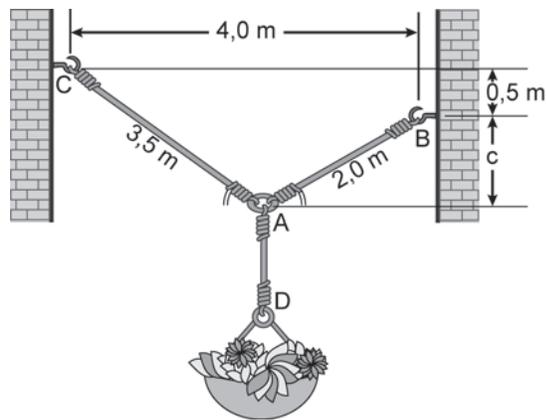
Essas duas equações podem ser substituídas por apenas uma equação vetorial, representada pela soma vetorial das forças atuantes. Como citado anteriormente, a notação vetorial só é importante para os problemas tridimensionais e não será utilizada.

Quando se usa a notação escalar, o sentido de cada componente da força é estabelecido pelo sinal algébrico, conforme a orientação da seta relativamente a eixos cartesianos previamente adotados.

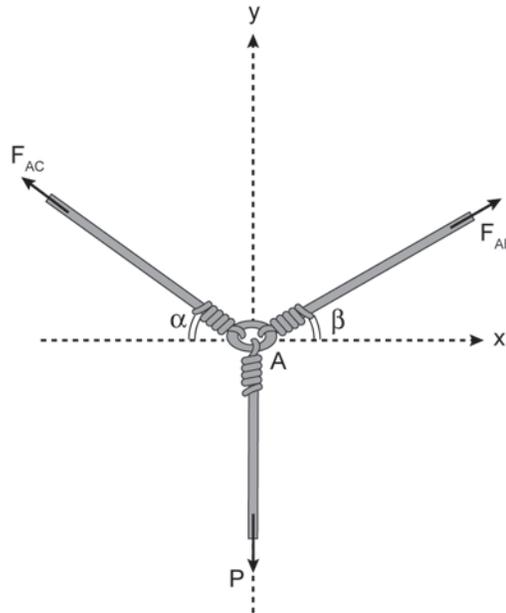
Para uma força de valor desconhecido, se arbitra um sentido para representá-la no DCL. Se o valor obtido para ela for negativo, isto significa que o sentido correto será o contrário do adotado.

Problema 2.2 Um vaso é suspenso por três fios e suportado por ganchos em B e C. Conhecendo os ângulos $\beta = 30^\circ$ e $\alpha = 50^\circ$:

- Se o vaso pesa $P = 500\text{ N}$, calcule o valor das forças nos três fios;
- Suponha que os fios AC e AB resistem no máximo a 400 N . Qual é o maior valor para o peso do vaso de modo que os fios AC e AB não rompam?



Solução: o ponto A reúne todos os dados do problema. O estudo do equilíbrio desse ponto é adequado para a solução. O DCL do ponto A mostra todas as forças atuantes, exercidas pelos três fios. Observe que a força no fio AD foi considerada conhecida, igual a P . O estudo do equilíbrio do ponto D permite facilmente chegar a essa conclusão – verifique pelo DCL de D:



a) Equilíbrio do ponto A:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{ABx} - F_{ACx} = 0 \rightarrow F_{AB} \cdot \cos\beta - F_{AC} \cdot \cos\alpha = 0$$

$$F_{AB} \cdot 0,866 - F_{AC} \cdot 0,643 = 0 \rightarrow F_{AB} = 0,742 \cdot F_{AC}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{AB_y} - F_{AC_y} - 500 = 0 \rightarrow F_{AB} \cdot \sin\beta + F_{AC} \cdot \sin\alpha - 500 = 0$$

$$F_{AB} \cdot 0,5 + F_{AC} \cdot 0,766 - 500 = 0$$

Substituindo o valor de F_{AB} :

$$0,742 \cdot F_{AC} \cdot 0,5 + F_{AC} \cdot 0,766 = 500 \rightarrow F_{AC} = 440 \text{ N}$$

Voltando na 1ª equação:

$$F_{AB} = 0,742 \cdot F_{AC} \rightarrow F_{AB} = 326 \text{ N}$$

b) Equilíbrio do ponto A – valem as mesmas equações de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{ABx} - F_{ACx} = 0 \rightarrow F_{AB} \cdot \cos \beta - F_{AC} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{ABy} - F_{ACy} - P = 0 \rightarrow F_{AB} \cdot \sin \beta + F_{AC} \cdot \sin \alpha - P = 0$$

Resolvendo o sistema para as forças nos fios – em função de P:

$$F_{AB} \cdot 0,866 - F_{AC} \cdot 0,643 = 0 \rightarrow F_{AB} = 0,742 \cdot F_{AC}$$

$$F_{AB} \cdot 0,5 + F_{AC} \cdot 0,766 - P = 0 \rightarrow 0,742 \cdot F_{AC} \cdot 0,5 + F_{AC} \cdot 0,766 = P$$

$$\rightarrow F_{AC} = 0,880 \cdot P \rightarrow F_{AB} = 0,742 \cdot F_{AC} \rightarrow F_{AB} = 0,653 \cdot P$$

Como nenhum dos dois fios pode ter força maior que 400 N e o fio AC está mais solicitado que o fio AB:

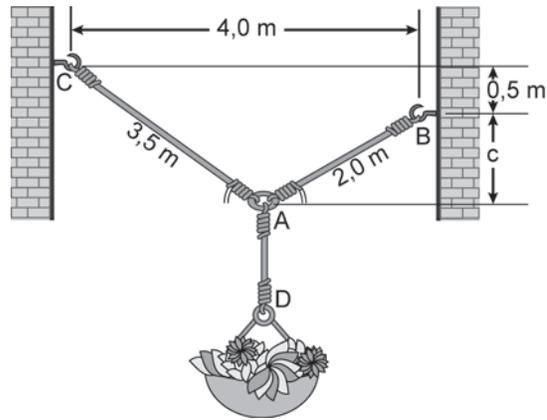
$$0,88 \cdot P < 400 \rightarrow P < 455 \text{ N}$$

Nesse tipo de problema é muito comum cometer o erro de considerar que, na iminência da ruptura – situação correspondente ao peso máximo do vaso –, a força nos dois fios vale 400 N, determinando-se o valor de P a partir de apenas uma das equações. Nesse caso, restaria apenas uma incógnita. Observe que, dessa forma, a outra equação nunca será satisfeita.

Observe ainda que, para a geometria dada, é impossível que a força nos fios seja igual. A solução das forças em relação a P mostra que o fio AC sempre fica mais tracionado que o fio AB.

Portanto, você deve analisar separadamente que nenhum fio ultrapasse seu valor máximo e então escolher a condição mais restritiva. Nesse caso, como é óbvio que a força em AC é maior que em BC (pois $0,88 P > 0,653 P$), foi feita apenas a análise desse fio.

Problema 2.3 Considere a mesma situação do problema anterior, exceto pela diferença na geometria. Se o vaso pesar $P = 500 \text{ N}$, calcule o valor das forças exercidas nos ganchos B e C:



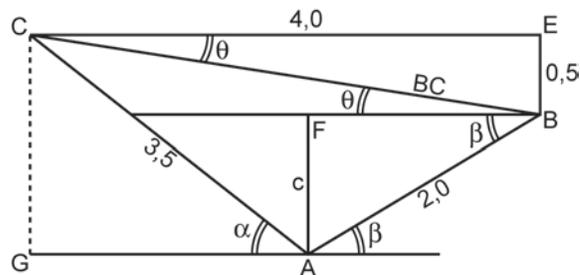
Solução: as forças exercidas nos ganchos são as forças de tração nos cabos a eles ligados – ação e reação – força do gancho no cabo = força do cabo no gancho.

Equilíbrio do ponto A:

$$\sum F_x = 0 \quad F_{ABx} - F_{ACx} = 0 \quad F_{AB} \cdot \cos\beta - F_{AC} \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{ABy} + F_{ACy} - 500 = 0 \quad F_{AB} \cdot \sin\beta + F_{AC} \cdot \sin\alpha - 500 = 0$$

Determinação dos ângulos:



$$\text{triângulo BCE: } BC^2 = 4,0^2 + 0,5^2 \rightarrow BC = 4,03 \text{ m}$$

$$\text{tg}\theta = 0,5/4 \quad \theta = 7,12^\circ$$

$$\text{triângulo ABC: } 3,5^2 = 4,03^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4,03 \cdot \cos(\beta + \theta)$$

$$\beta = 53,2^\circ$$

triângulo ABF: $\text{sen}\beta = c/2 \rightarrow c = 1,6$

triângulo AGC: $\text{sen}\alpha = (c + 0,5)/3,5 \rightarrow \alpha = 36,8^\circ$

Voltando às equações de equilíbrio e resolvendo o sistema:

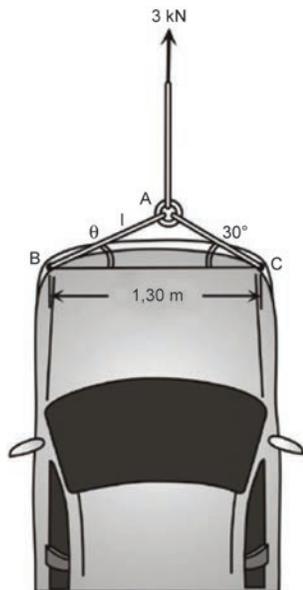
$$F_{AB} \cdot 0,6 - F_{AC} \cdot 0,8 = 0 \rightarrow F_{AB} = 1,333 \cdot F_{AC}$$

$$F_{AB} \cdot 0,8 - F_{AC} \cdot 0,6 - 50 = 0 \rightarrow 1,333 \cdot F_{AC} \cdot 0,8 + F_{AC} \cdot 0,6 = 500 \rightarrow$$

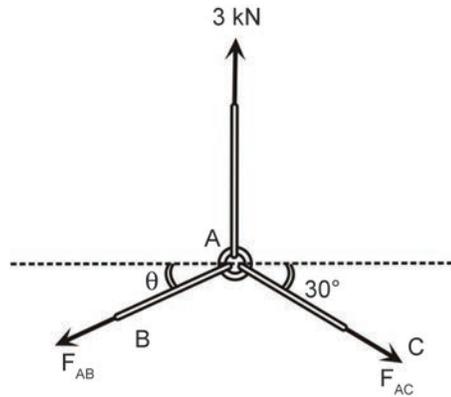
$$F_{AC} = 300 \text{ N} \rightarrow F_{AB} = 1,333 \cdot F_{AC} \rightarrow F_{AB} = 400 \text{ N}$$

Portanto, as forças exercidas nos ganchos têm os valores calculados, na direção dos cabos, e o sentido apontado para o ponto A. A dificuldade do problema reside apenas na determinação da geometria dos fios. Caso os dados fossem apresentados de forma a explicitar mais facilmente as direções dos cabos – como no exemplo anterior –, sua resolução seria muito mais simples.

Problema 2.4 O carro vai ser rebocado conforme esquema da figura com uma força de 3 kN. Sabendo que as cordas utilizadas resistem a no máximo 3,75 kN, qual é o menor ângulo da corda AB para que a operação tenha sucesso?



Solução: equilíbrio do ponto A.



$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{ACx} - F_{ABx} = 0 \rightarrow F_{AC} \cdot \cos 30 - F_{AB} \cdot \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 3 - F_{ABy} - F_{ACy} = 0 \rightarrow 3 - F_{AB} \cdot \sin \theta - F_{AC} \cdot \sin 30 = 0$$

Há três incógnitas e apenas duas equações de equilíbrio. Resolvendo o sistema para as forças nas cordas – em função de θ :

$$F_{AC} = 1,155 F_{AB} \cdot \cos \theta$$

$$F_{AB} \cdot \sin \theta = 3 - 0,577 F_{AB} \cdot \cos \theta \rightarrow F_{AB} = 3 / (\sin \theta + 0,577 \cos \theta)$$

$$F_{AC} = 3,465 \cdot \cos \theta / (\sin \theta + 0,577 \cos \theta)$$

Não se sabe qual corda vai romper antes, pois as expressões para F_{AB} e F_{AC} (funções de θ) não permitem uma conclusão direta. Supondo que $F_{AC} = 3,75$ kN:

$$3,75 = 3,465 \cdot \cos \theta / (\sin \theta + 0,577 \cos \theta)$$

$$3,75 \cdot \sin \theta = 1,30 \cos \theta \rightarrow \operatorname{tg} \theta = 0,347 \rightarrow \theta = 19,1 \text{ graus}$$

Para esse valor de θ :

$$F_{AB} = 3 / (\sin \theta + 0,577 \cos \theta) = 3 / (\sin 19,1 + 0,577 \cos 19,1)$$

$$F_{AB} = 3,44 < 3,75$$

A hipótese da corda AC romper antes da corda BC mostrou-se verdadeira. Considerar $F_{AB} = 3,75$ resultaria, para outro valor de θ , num valor maior que 3,75 para F_{AC} , ou seja, seria uma situação impossível de ocorrer. Logo, o ângulo entre as cordas vale: $(180 - 30 - 19,1) = 130,9^\circ$. Aplicando a lei dos senos: $l/\text{sen}30 = 1,3/\text{sen}130,9 \rightarrow l = 0,86 \text{ m}$.

Esse é o menor ângulo possível. Caso ele seja menor, para obter a mesma componente na direção da força necessária para o reboque – fixada em 3 kN – o valor da tração deve ser maior que 3,75 kN, e a corda rompe.

Observe que, na situação referente à ruptura – correspondente ao θ mínimo da corda –, apenas uma das cordas tem força igual ao valor máximo de 3,75 kN. Para a geometria dada, é impossível que as forças nas cordas sejam iguais.

2.5 Considerações finais

Esta é a sequência para a solução de problemas de equilíbrio de partícula:

- a) Desenhar um DCL, que representa a partícula “livre” de sua vizinhança com as forças nela atuantes;
- b) Indicar as forças conhecidas com seu valor, direção e sentido. Forças com valor ou direção desconhecidos (incógnitas) devem ser representadas por símbolos apropriados, adotando-se sentidos arbitrários;
- c) Selecionar eixos x e y para decomposição e soma de cada uma das forças nessas direções para posterior aplicação do equilíbrio:

$$\sum F_{x=0} \text{ e } \sum F_{y=0}.$$

UNIDADE 3

Equilíbrio de corpos rígidos

3.1 Primeiras palavras

Na análise do equilíbrio de um corpo em que as forças não estão todas aplicadas num mesmo ponto, o tamanho do corpo e os pontos de aplicação das forças são importantes. Um conceito fundamental associado aos efeitos de uma força sobre um corpo é o momento de uma força, grandeza que mede a tendência de rotação provocada por ela. Assim, uma força poderá provocar dois tipos de movimento num corpo: translação e rotação.

As condições de equilíbrio não mudam quando se troca o ponto de aplicação de uma força desde que seja mantida a sua linha de ação (direção) e sentido – princípio da transmissibilidade. Isso só se aplica à análise de equilíbrio, não a tensões e deformações.

Além disso, é importante diferenciar forças externas e internas. As externas representam a ação de outros corpos sobre aquele em estudo, sendo responsáveis pelo possível movimento do corpo – ou seja, são as forças que importam na análise do equilíbrio e que aparecem no DCL.

As forças internas são aquelas que mantêm unidas as partes ou partículas constituintes do corpo e não aparecem no DCL desse corpo (pois aparecem aos pares e se cancelam – ação e reação).

3.2 Problematizando o tema

Imagine uma situação em que algumas pessoas estão tentando puxar um carro com uma corda de modo que a linha de ação da força exercida passe pelo centro de gravidade do veículo – será visto, na Unidade 4, que o centro de gravidade é o ponto de aplicação da força-peso. Essa força tende a provocar um movimento de translação no veículo na direção e sentido da força. Essa situação e o DCL do carro estão mostrados na Figura 3.1 (está desprezado o atrito entre o solo e as rodas). Observe que, na elaboração do DCL, está isolado o carro do solo e da corda. Todas as forças representadas são externas ao carro: força-peso (atração gravitacional exercida pela Terra, aplicada no centro de gravidade do carro), força exercida pelo solo e força exercida pela corda no carro, nas respectivas posições. São elas que importam na análise do equilíbrio ou movimento do carro.

Imagine agora que o mesmo carro, sem a corda, esteja submetido a forças exercidas por dois macacos posicionados junto às rodas traseiras, orientadas para cima. O principal efeito dessas forças no carro é imprimir um movimento de rotação em torno do eixo dianteiro. Ou seja, forças aplicadas em corpos rígidos podem provocar movimentos de translação e rotação caso não sejam contrabalanceadas por forças reativas:

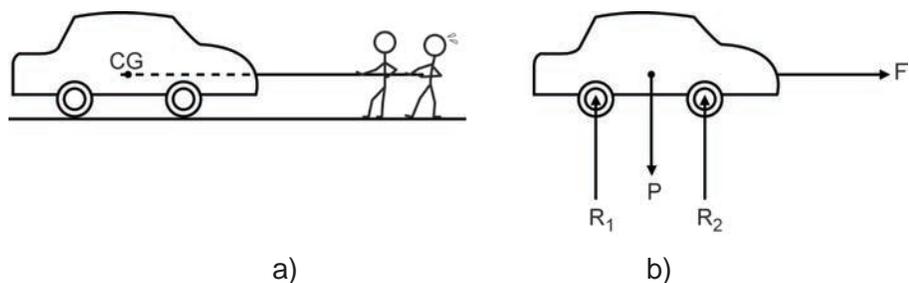


Figura 3.1 a) pessoas puxando um carro com uma corda; b) DCL do carro.

3.3 Momento de uma força

O momento de uma força em relação a um ponto é uma grandeza ou um efeito da força que mede a tendência do movimento de rotação em torno desse ponto. O momento de uma força é um vetor. Por definição, ele é calculado pelo produto vetorial do vetor-posição dessa força (r), que define a posição da força em relação ao ponto considerado, pelo vetor-força (F):

$$M = r \times F \quad (3.1)$$

O módulo, a direção e o sentido do vetor momento são determinados conforme as propriedades do produto vetorial. O valor de M pode ser obtido pelo produto de r por F (escalares), desde que eles sejam ortogonais. A direção de M é perpendicular ao plano definido por r e F , e o sentido é dado pela regra da mão direita – com os dedos posicionados no sentido de r para F , o dedão mostra o sentido do momento.

Para ilustrar esses conceitos, considere a situação da chave acoplada num tubo, mostrada na Figura 3.2. No primeiro caso, a força exercida é horizontal. Ela provoca uma tendência de giro do tubo em torno do eixo z devido ao momento $(M_0)_z$ causado pela força no ponto O . Intuitivamente, sabemos que quanto maior a distância d_y , maior a tendência de giro, ou seja, maior é o momento da força em O : $(M_0)_z = F_x \cdot d_y$.

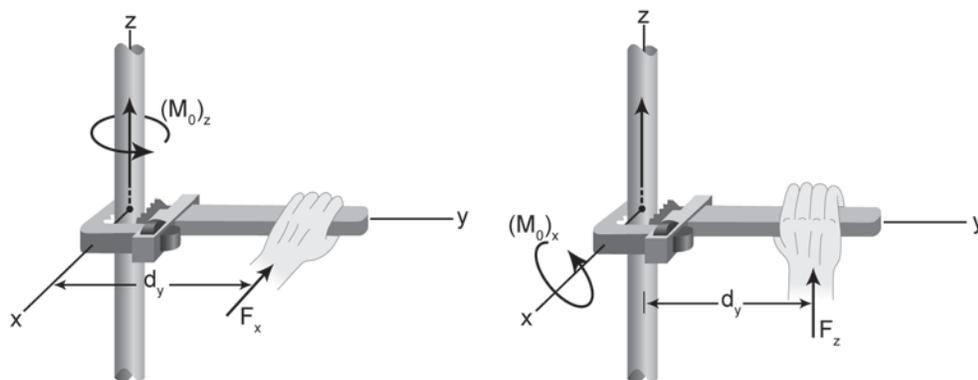


Figura 3.2 Diferentes situações de forças e momentos.

Observe que a força e a chave definem um plano (xy), e a direção do momento é perpendicular a esse plano – direção do eixo z . Observe também que a distância considerada é perpendicular à força.

Na segunda situação, a força é vertical e provoca uma tendência de giro em torno do eixo x . Valem as mesmas observações: $(M_0)_x = F_z \cdot d_y$. Nesse caso, a força e a chave definem um plano yz , e a direção do momento é perpendicular a esse plano (direção x).

Imagine agora uma força “inclinada” aplicada no mesmo ponto, com componentes F_x e F_z . Naturalmente, percebe-se que há tendência de giro do tubo em torno dos eixos z e x , pois o momento provocado por essa força tem componentes nessas duas direções.

E se fosse aplicada uma força na direção y (horizontal)? Intuitivamente, percebe-se que ela não provocaria tendência de giro do tubo. Matematicamente, isso se explica porque a força – linha de ação – passa pelo ponto O , ou seja, a distância da força ao ponto vale zero, e o momento provocado por ela em O é nulo.

Conforme foi registrado na unidade anterior, a notação vetorial não é essencial nos problemas bidimensionais. Nesses casos, a caracterização do momento pode ser feita de forma mais simples.

Sempre que as forças e o corpo em estudo estão contidos num mesmo plano, xy por exemplo, os momentos provocados pelas forças têm a direção do eixo perpendicular ao plano (eixo z). Então, a direção não precisa ser indicada, pois não varia.

O valor do momento é igual ao produto da força pela distância, tomada na perpendicular da linha de ação da força até o ponto. O sentido do momento fica definido pelo giro em torno do eixo z , horário ou anti-horário. Usualmente, convencionou-se adotar positivo para o sentido de giro anti-horário, de forma a coincidir com o sentido obtido pelo cálculo vetorial.

Para ilustrar o cálculo do momento de uma força qualquer numa situação bidimensional, considere a situação ilustrada na Figura 3.3a), em que se exerce uma força numa chave de rodas. Observe que tanto o corpo como as forças estão num mesmo plano, usualmente representado pelo plano xy :

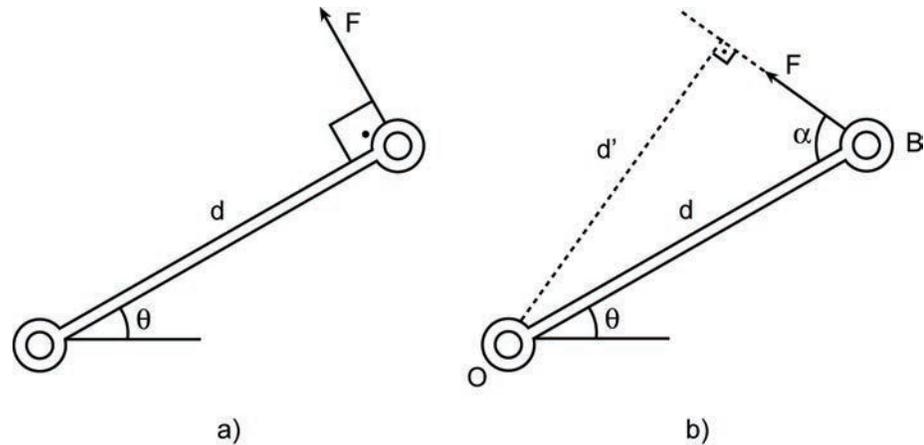


Figura 3.3 Cálculo do momento: situações de força aplicada numa chave de rodas.

Na situação da Figura 3.3a), o valor do momento da força em relação ao ponto O é dado pelo produto $F \cdot d$, pois d é perpendicular a F . O sentido de giro é anti-horário. A distância d utilizada no cálculo aparece explicitamente no desenho – é o próprio tamanho da chave.

Observe agora a Figura 3.3b), em que a força aplicada no mesmo ponto não é mais perpendicular à chave. A distância d dada não é mais a distância a ser empregada no cálculo do momento, pois não é perpendicular – do ponto O até a linha de ação da força. Ou seja, a distância (d') precisa ser calculada empregando-se conceitos de geometria plana para os dados do problema.

Entretanto, em vez de calcular a distância d' , normalmente é mais simples calcular o momento decompondo a força em componentes ortogonais (F_x e F_y) e somando os momentos provocados por elas. Obviamente a distância de cada componente até o ponto deve ser facilmente calculada ou identificada, conforme mostra a Figura 3.4. Isso é ainda mais relevante quando se tem várias forças:

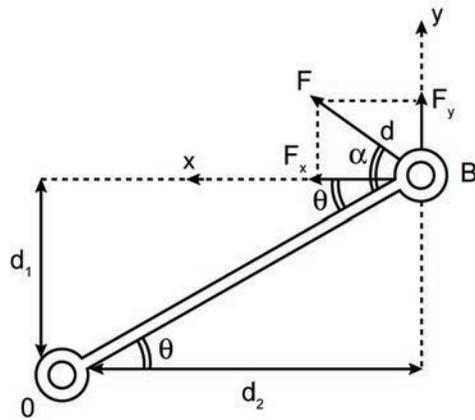


Figura 3.4 Decomposição da força em componentes para cálculo do momento.

Componentes da força:

$$F_x = F \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

$$F_y = F \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

Os momentos provocados pelas componentes são calculados empregando-se as distâncias d_1 e d_2 , supostamente conhecidas:

$$M_{F_x} = F_x \cdot d_1, \text{ com } d_1 = d \cdot \sin\theta - \text{momento positivo: sentido anti-horário}$$

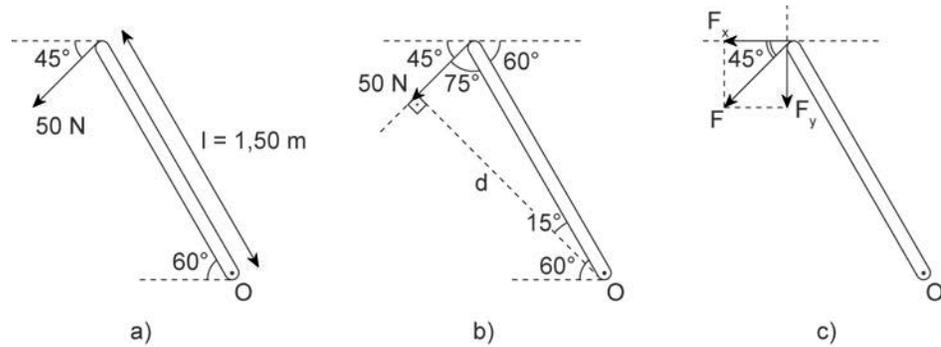
$$M_{F_y} = F_y \cdot d_2, \text{ com } d_2 = d \cdot \cos\theta - \text{momento positivo: sentido anti-horário}$$

$$M_F = M_{F_x} + M_{F_y}$$

Demonstra-se que o momento da resultante de várias forças concorrentes em relação a um ponto 0 é igual à soma dos momentos das várias forças em relação ao mesmo ponto 0 – teorema de Varignon. Portanto, o momento da força dada em relação ao ponto 0 é igual à soma dos momentos das suas componentes em relação ao ponto 0. Nesse caso, é importante estabelecer os sinais corretos para efetuar a soma.

Os eixos adotados para trabalhar com as componentes devem ser ortogonais entre si, mas não necessariamente devem ser os eixos horizontal e vertical. Para cada problema, é necessário procurar os eixos mais apropriados para facilitar a determinação das distâncias d_1 e d_2 . No caso da Figura 3.4, um eixo x coincidente com a direção da chave pode ser uma alternativa interessante.

Problema 3.1 Calcule o momento provocado pela força de 50 N em relação ao ponto O:



Solução 1 (Figura b): empregam-se relações trigonométricas simples do triângulo retângulo para determinar a distância d da força dada até o ponto O. Nem sempre é tão simples calcular essa distância:

$$d = 1,5 \cdot \cos 15$$

$$d = 1,449 \text{ m} \rightarrow M = 50 \cdot 1,449 = 72,4 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (sentido de giro anti-horário)}$$

Solução 2a (Figura c): calculam-se os momentos causados pelas componentes da força. As distâncias de cada componente devem ser obtidas facilmente. Nesse caso, é importante considerar os momentos das componentes com seu respectivo sinal, já que eles serão somados algebricamente para calcular o momento provocado pela força dada:

$$F_x = 50 \cdot \cos 45 = 35,36 \text{ N} \rightarrow M_{F_x} = 35,36 \cdot 1,5 \cdot \sin 60$$

$$\rightarrow M_{F_x} = 45,93 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (sentido de giro anti-horário)}$$

$$F_y = 50 \cdot \sin 45 = 35,36 \text{ N} \rightarrow M_{F_y} = 35,36 \cdot 1,5 \cdot \cos 60 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_y = 45,93 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (sentido de giro anti-horário)}$$

$$M = 72,4 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (sentido de giro anti-horário)}$$

Solução 2b: alternativamente (nesse caso é mais simples), pode-se estabelecer outro sistema de referência xy . Adotando-se um eixo y na direção da chave, apenas a componente F_x provoca momento em O, com distância conhecida (1,5 m), pois F_y passa por O. O ângulo formado por F e o eixo x também é conhecido, igual a 15° .

$$F_x = 50 \cdot \cos 15 \rightarrow M_{F_x} = 48,30 \cdot 1,5 = 72,4 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (anti-horário)}$$

3.4 Equilíbrio de corpos rígidos

Um corpo rígido pode ter dois tipos de movimento: translação e rotação. Para ficar em equilíbrio, duas condições são fundamentais: a força resultante sobre ele deve ser nula – para não haver movimento de translação –, e o momento resultante em relação a qualquer ponto pertencente ao corpo deve ser nulo – para não haver movimento de rotação.

Assim, o equilíbrio é expresso segundo duas equações vetoriais:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \text{e} \quad \sum \mathbf{M} = 0$$

Nos problemas bidimensionais – plano xy , por exemplo –, pode-se dizer que um corpo tem três movimentos possíveis. Um movimento de rotação, em torno do eixo z , e dois movimentos de translação, orientados segundo os eixos x e y – o que é equivalente a um movimento de translação de direção qualquer, obtido a partir da composição dos dois movimentos nas direções x e y . Portanto, empregando uma abordagem escalar, são três as equações algébricas que garantem o equilíbrio:

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M_o = 0 \quad (3.2)$$

Normalmente, não se coloca, na terceira equação, que o momento se refere a um momento M_z , pois isso está sempre implícito. Porém, aqui sempre será indicado a que ponto se refere o momento calculado.

Como já observado na unidade anterior, a limitação ao estudo de casos bidimensionais não é tão restritiva. Em muitos problemas, há uma seção (plano) representativa da situação tridimensional real, em que se podem representar as forças nela atuantes, configurando uma situação de análise de equilíbrio bidimensional.

3.4.1 Reações de apoios (bidimensional)

Existem várias maneiras de fixar uma estrutura ou um corpo para mantê-lo em equilíbrio. Como regra geral, a um movimento de translação impedido corresponde uma força aplicada pelo apoio nessa direção. Analogamente, se um movimento de rotação for impedido, um momento será aplicado sobre o corpo. Todos

os tipos de apoios podem ser idealmente classificados segundo três categorias básicas, descritas a seguir e ilustradas na Tabela 3.1:

- **Apoio simples ou móvel:** no ponto vinculado, impede o movimento de translação em uma direção conhecida, exercendo força nessa direção, contrária à tendência de movimento – roletes, superfícies sem atrito, hastes de conexão e cabos curtos, pinos em fendas etc. Corresponde a uma incógnita ou um vínculo;
- **Apoio fixo:** no ponto vinculado, impede a translação em qualquer direção do plano – pinos, articulações, superfícies rugosas etc. –, exercendo uma orça de direção qualquer (ou pode-se dizer que impede o movimento de translação nas direções x e y, exercendo forças nessas duas direções). Fixa completamente o ponto vinculado, porém não impede o giro em torno dele. Corresponde a duas incógnitas – F_x e F_y , ou uma força e sua direção;
- **Engaste:** impede qualquer movimento do corpo, exercendo forças nas direções x e y e momento. Corresponde a três incógnitas. Na verdade, como se verá em alguns exercícios, no engaste ocorrem forças distribuídas na superfície de contato do apoio, que resultam em momento e componentes de forças nas direções x e y:

Tabela 3.1 Principais características dos diferentes tipos de apoio.

Tipo de apoio	Reações de apoio	Incógnitas
		1 - direção e sentido conhecidos (sempre força de tração no fio)
		1 - direção conhecida (eixo da haste de apoio)
		1 - direção conhecida (perpendicular à guia, haste ou fenda)
		1 - direção conhecida (perpendicular à superfície de apoio)
		2 - força de direção qualquer (F e theta) ou duas componentes cartesianas da força (F_x e F_y)
		3 - idem a anterior, mais a reação de momento

O rolete ou cilindro e o fio impedem apenas um movimento de translação. Assim, só podem exercer uma força sobre o corpo, na direção impedida – no caso do fio, de sentido conhecido, aquela que traciona o fio.

A vinculação mais restritiva proporcionada pelo pino impede a translação do corpo em qualquer direção, exercendo uma força numa direção qualquer – aquela exigida pelo equacionamento do equilíbrio, conforme o carregamento aplicado. Para análise do problema, normalmente é mais simples representar essa força de direção qualquer (duas incógnitas: valor e direção da força) por meio de suas duas componentes cartesianas, F_x e F_y .

O engaste é o apoio mais restritivo, pois impede a rotação e translação do corpo, aplicando um momento e uma força de direção qualquer nesse ponto ou um momento e duas componentes de forças, F_x e F_y .

Para todas as situações de análise, deve-se arbitrar um sentido para as incógnitas nos apoios. O sinal obtido na solução vai indicar se a hipótese inicial estava correta. Quando for previsível, deve-se adotar o sentido correto.

3.4.2 DCL

Para o estudo do equilíbrio de um corpo, inicialmente se faz o DCL, em que o corpo é isolado de eventuais outros corpos e dos apoios: aparecem as forças ativas (aplicadas) e as forças de reação exercidas pelos apoios. Para permanecer em equilíbrio quando submetido a forças, é necessário que o corpo esteja convenientemente fixado, por meio de vínculos que exercem forças reativas, que equilibram as forças aplicadas, conforme explicado no item anterior.

As forças representadas no DCL são aplicadas nos pontos em que o corpo estava ligado ou conectado com outras partes ou com os apoios. Nunca se esqueça do peso próprio, que é sempre uma força externa. Lembre-se de que as forças representadas são exercidas sobre o corpo, e não pelo corpo.

Quando o objeto de estudo for constituído de várias partes, não se representam, no DCL, as forças internas, que mantêm unidas as partes. Elas sempre aparecem aos pares e são colineares de mesmo valor e sentidos opostos – ação e reação. Assim, seus efeitos sobre o equilíbrio são nulos – a uma força que uma parte A exerce numa parte B corresponde uma reação de B em A. Apenas as forças exercidas por corpos externos aos limites do corpo livre estudado são importantes e devem ser indicadas.

Geralmente, as forças desconhecidas correspondem às reações exercidas pelos vínculos – solo, outros corpos etc. –, que se opõem a um possível movimento do corpo. As dimensões também devem ser consideradas na construção do DCL, pois são utilizadas no cálculo dos momentos das forças.

3.4.3 Equações de equilíbrio

Como há pouco, um corpo no plano tem três movimentos possíveis. Assim, para mantê-lo em equilíbrio – para impedir esses movimentos possíveis –, são necessários pelo menos três vínculos. Isso pode ser feito de várias maneiras. Considere uma barra fixada conforme os dois esquemas mostrados na Figura 3.5:

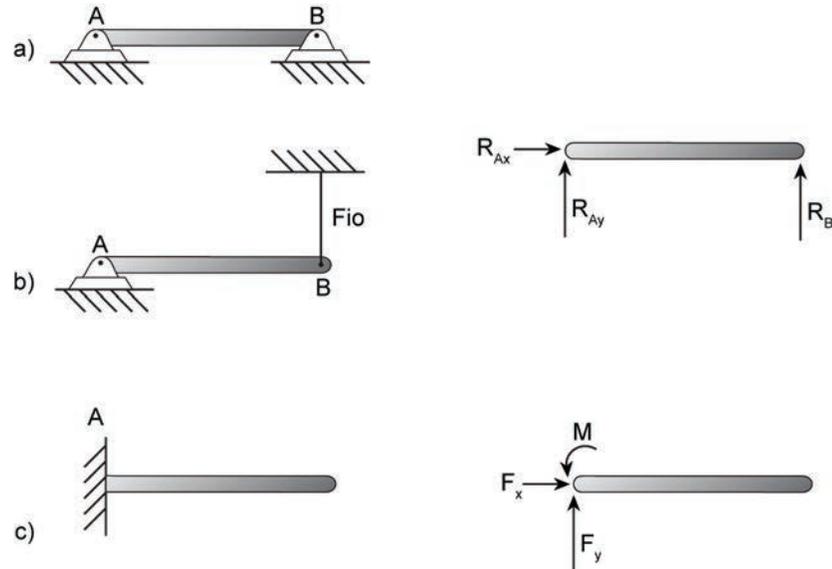


Figura 3.5 Esquemas de vinculação de uma barra e respectivas reações de apoio.

Nos casos a) e b), a barra foi fixada por um apoio fixo e um móvel, situação que corresponde a três vínculos. No caso c) foi usado um engaste, que também representa três vínculos. Quando carregada ou submetida à ação de forças, o comportamento dessa barra muda conforme sua vinculação em termos de reações, tensões, deformações etc., mas o equilíbrio é possível em todas as situações.

No caso a), o apoio A fixa completamente a barra nesse ponto, mas sua rotação em relação ao ponto A não fica impedida. É necessário acrescentar mais um vínculo, representado pelo apoio móvel em B, capaz de exercer uma força vertical (para cima ou para baixo), impedindo o corpo de girar. O esquema é similar ao caso em que um fio exerce o papel do apoio móvel, mas, neste caso, o fio só consegue exercer uma força na barra orientada para cima – ou seja, a barra só ficará em equilíbrio se estiver submetida a um carregamento dirigido para baixo, que traciona o fio.

No caso c), apenas com o engaste em A o corpo permanece em equilíbrio, pois ele impede qualquer movimento no apoio A, inclusive a rotação. Em consequência, o corpo também não se move.

O equacionamento do equilíbrio é representado pelas três equações anteriormente apresentadas, $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M_0 = 0$, sendo 0 um ponto qualquer do corpo escolhido para a análise do momento. Como há três equações que regem o equilíbrio no plano, pode haver, no máximo, três incógnitas para que o problema seja determinado. Normalmente, elas correspondem às forças exercidas pelos vínculos.

Para calcular essas reações, desenha-se o DCL da barra e calculam-se as componentes F_x e F_y de todas as forças aplicadas, assim como os momentos provocados por elas em relação a um ponto escolhido, para aplicar nas três equações de equilíbrio. O ponto O, escolhido para calcular os momentos, pode ser qualquer ponto da barra. Deve-se escolher o ponto mais conveniente, aquele que facilita os cálculos.

O sistema de três equações e três incógnitas pode ser resolvido pela solução simultânea das equações. No entanto, quase sempre se consegue calcular as incógnitas, resolvendo, isolada e sucessivamente, cada equação, desde que ela contenha apenas uma incógnita.

Para isso, no caso da equação de momento, sempre que possível escolhe-se um ponto adequado – ponto de intersecção da linha de ação de duas forças incógnitas. Por exemplo: no esquema da Figura 3.5a) pode-se analisar o momento em relação ao ponto A, pois é nulo o momento provocado pelas forças R_{Ax} e R_{Ay} , que passam pelo ponto. Resta, na equação dos momentos, apenas a incógnita R_B . Isso facilita os cálculos.

É importante registrar que não se obtém uma quarta equação de equilíbrio ao fazer o equacionamento do momento em outro ponto, além das três equações já utilizadas. Essa outra equação será uma combinação das anteriores, dependente das demais, e não acrescentará nenhuma informação nova. Ou seja, não haverá solução completa se houver mais de três incógnitas no problema.

Entretanto, apesar de não haver uma nova quarta equação de equilíbrio, é possível resolver o equilíbrio com outros conjuntos de três equações. As equações $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M_0 = 0$ são clássicas, pois exprimem claramente o conceito do equilíbrio e têm um significado físico mais definido, como visto no início do item 3.4. Consulte uma bibliografia mais detalhada para entender esse tópico. Será apenas mostrado outro conjunto alternativo de equações, considerando o esquema da Figura 3.6:

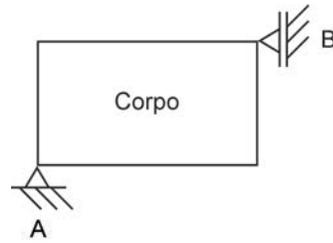


Figura 3.6 Placa vinculada por apoio fixo e móvel.

Será mostrado que o equilíbrio ficará garantido se forem satisfeitas as seguintes equações:

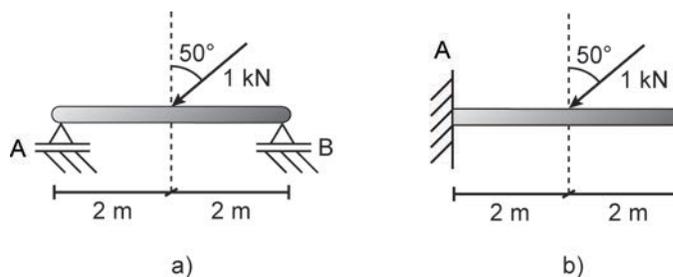
$$\sum F_x = 0;$$

$$\sum F_y = 0;$$

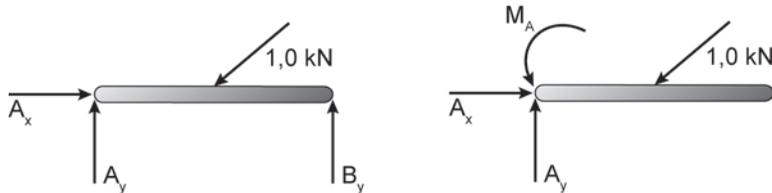
$$\sum M_o = 0.$$

Supondo obedecidas as duas primeiras equações, resultará que, se houver uma força resultante, ela deverá ser vertical e passar por A – pelas imposições das duas equações: da primeira, resta que uma possível força resultante não tem componente horizontal, ou seja, é vertical; da segunda, que essa força passa por A. Como A e B não estão alinhados verticalmente, é impossível existir uma resultante que também passe por B para satisfazer a terceira equação. Ou seja, somente para força resultante nula é possível satisfazer as três equações. Assim, o corpo estará em equilíbrio caso as três equações sejam satisfeitas.

Problema 3.2 Considere uma barra vinculada conforme esquema da situação a) apoio fixo e apoio móvel e situação b) engaste. Calcule os valores das reações de apoio:



Solução: DCL das barras – reações de apoio com sentidos arbitrários – desconhecidas:



a.1) Equações clássicas do equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x - 1,0 \cdot \text{sen}50 = 0 \rightarrow A_x = 0,766 \text{ kN (para direita)}$$

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow \sum M_A = 0 \rightarrow B_y \cdot 4 - 1,0 \cos 50 \cdot 2 = 0 \rightarrow B_y = 0,321 \text{ kN (para cima)}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - 1 \cdot \text{sen}50 = 0 \rightarrow A_y = 0,321 \text{ kN (para cima)}$$

Observe que foram analisadas as equações numa ordem em que foi possível resolvê-las isoladamente, sem precisar resolver o sistema. Nem sempre isso é possível.

a.2) Equações alternativas:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0,766 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_y \cdot 4 - 1,0 \cdot \cos 50 \cdot 2 = 0 \rightarrow B_y = 0,321 \text{ kN}$$

$$\sum M_b = 0 \rightarrow -A_y \cdot 4 + 1,0 \cdot \cos 50 \cdot 2 = 0 \rightarrow A_y = 0,321 \text{ kN}$$

b)

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x - 1,0 \cdot \text{sen}50 = 0 \rightarrow A_x = 0,766 \text{ kN (para direita)}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 1,0 \cdot \cos 50 = 0 \rightarrow A_y = 0,643 \text{ kN (para cima)}$$

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow \sum M_A = 0 \rightarrow -1,0 \cdot \cos 50 \cdot 2 + M_A = 0 \rightarrow M_A = 1,286 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(anti-horário)

Em todos os casos, arbitrou-se um sentido para as incógnitas. Dessa forma, todas as incógnitas resultaram em valor positivo, pois os sentidos adotados estavam certos. Em caso contrário, o sinal negativo significa que o sentido é o oposto

do arbitrado. Caso esse valor seja usado em outra equação já formulada, deverá-se considerar o sinal.

Sempre que possível, em casos mais simples como este, tente acertar o sentido da incógnita para não precisar corrigir a resposta.

3.4.4 Estruturas indeterminadas e parcialmente vinculadas

Apesar de necessária, nem sempre a colocação de três vínculos é suficiente para garantir o equilíbrio de um corpo no plano. Eles devem estar convenientemente dispostos. Para isso, não podem resultar em três forças concorrentes ou três forças paralelas. Observe a Figura 3.7, o corpo foi vinculado de diferentes formas, todas com três vínculos. Em todos os casos, o corpo fica em equilíbrio, exceto no esquema da Figura 3.7a), quando há um movimento possível – translação segundo a direção x , caso haja força aplicada nessa direção. Diz-se que uma estrutura plana é isostática ou estaticamente determinada quando tem três vínculos bem posicionados:

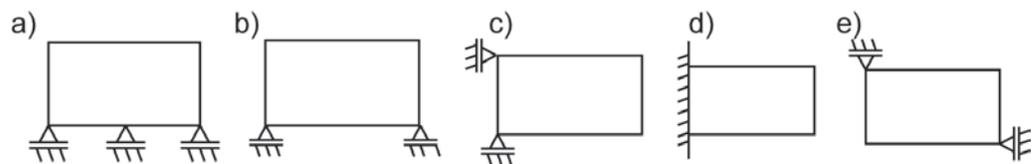


Figura 3.7 Placa vinculada de diferentes formas.

Se, em qualquer caso, se acrescentar outro vínculo, a estrutura se tornará estaticamente indeterminada ou hiperestática, não sendo mais possível calcular todas as reações de apoio apenas pela análise das equações de equilíbrio. Haverá mais vínculos do que os necessários para o equilíbrio, portanto mais incógnitas do que equações.

Existem muitas estruturas hiperestáticas na engenharia, ou seja, o fato de não se poder calculá-las apenas com as equações de equilíbrio não deve impedir seu uso. Outras equações adicionais são necessárias para o cálculo e são geralmente obtidas a partir do estudo da compatibilidade dos deslocamentos, que dependem de propriedades físicas do material e de características geométricas. Esse tema extrapola os objetivos deste livro.

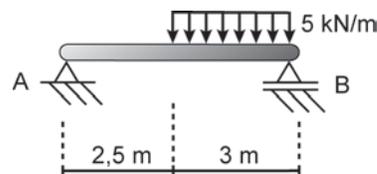
Se, ao contrário, se retirar algum vínculo de uma estrutura isostática, ela se tornará um mecanismo, com vinculação parcial e liberdade de movimento. Tais situações não deverão ser usadas na engenharia quando se quiser que a estrutura fique em equilíbrio.

3.4.5 Corpos com cargas distribuídas

Em diversas situações, um carregamento pode ser aplicado de forma distribuída numa extensão significativa de um corpo. O peso próprio, por exemplo, está distribuído ao longo de todo o corpo. Nesses casos, apenas para a análise do equilíbrio ou dos efeitos externos do carregamento, é possível substituir esse carregamento distribuído por uma força concentrada equivalente, ou seja, que produz os mesmos efeitos relativamente ao estudo do equilíbrio.

Essa força equivalente deve ter o mesmo valor que a resultante do carregamento distribuído, assim como deve provocar o mesmo momento em relação a qualquer ponto. Para isso, seu valor deve ser igual à área do diagrama que representa a carga distribuída, e sua linha de ação deve passar pelo centro geométrico desse diagrama. Vamos ilustrar para o caso de um carregamento distribuído uniformemente, representado por um diagrama retangular de força, com valores constantes ao longo da extensão do carregamento, conforme o Problema 3.3:

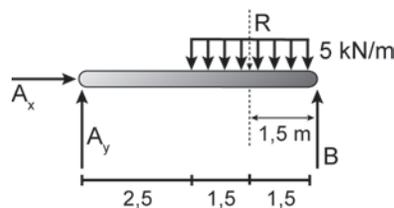
Problema 3.3 Calcule as reações nos apoios A e B da barra:



Solução: DCL da barra AB.

Força concentrada equivalente ao carregamento distribuído.

$R = 5 \cdot 3 = 15 \text{ kN} \rightarrow$ ponto de aplicação a 1,5 metro do apoio B:



Equações de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow \sum M_A = 0 \rightarrow B \cdot 5,5 - 15 \cdot 4 = 0 \rightarrow B = 10,91 \text{ kN (para cima)}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B - 15 = 0 \rightarrow A_y = 4,09 \text{ kN (para cima)}$$

3.4.6 Idealização de modelos

Na análise de um problema, é importante estabelecer o modelo de comportamento que mais se aproxima da realidade. Até aqui partiu-se de um modelo pronto para a resolução dos problemas sem explicar com detalhes como ele foi concebido.

Observe a Figura 3.8, em que se ilustra parte de uma estrutura da cobertura de um edifício. Pequenas vigas de aço se apoiam numa viga maior, cujas extremidades se conectam conforme o esquema: à esquerda, há uma reentrância na parede vertical; à direita, a viga simplesmente repousa no topo de outro edifício.

No estudo do equilíbrio ou das forças atuantes nos corpos constituintes dessa estrutura, é muito razoável assumir algumas hipóteses simplificadoras visando a construção de um modelo idealizado. O material constituinte – aço, por exemplo – pode ser considerado rígido, pois apenas pequenos deslocamentos ocorrerão sob ação de cargas.

O apoio na extremidade da esquerda pode ser representado por um apoio fixo ou rotulado, pois apenas pequenas rotações (indesejadas) podem surgir nesse ponto. Na extremidade da direita, o movimento vertical possível (para baixo), decorrente da ação de forças gravitacionais, está impedido, mas não o movimento horizontal (desprezando-se o atrito) e o giro. Isso corresponde a um apoio do tipo móvel ou rolete. Para uma situação típica de uso dessa estrutura, as forças F aplicadas são muito maiores que o peso próprio da viga, de tal forma que desprezar o efeito do peso próprio da viga pode ser aceitável. O modelo resultante dessa situação é mostrado na Figura 3.8b):

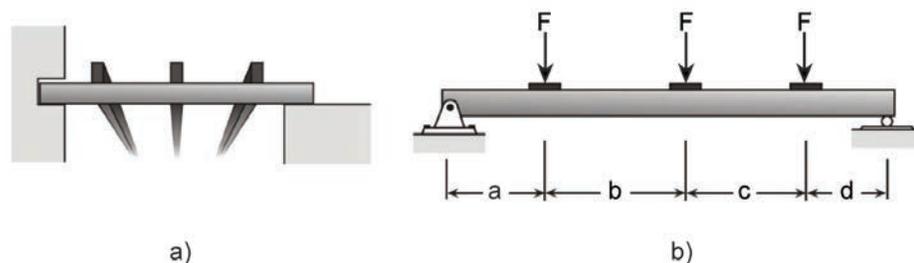
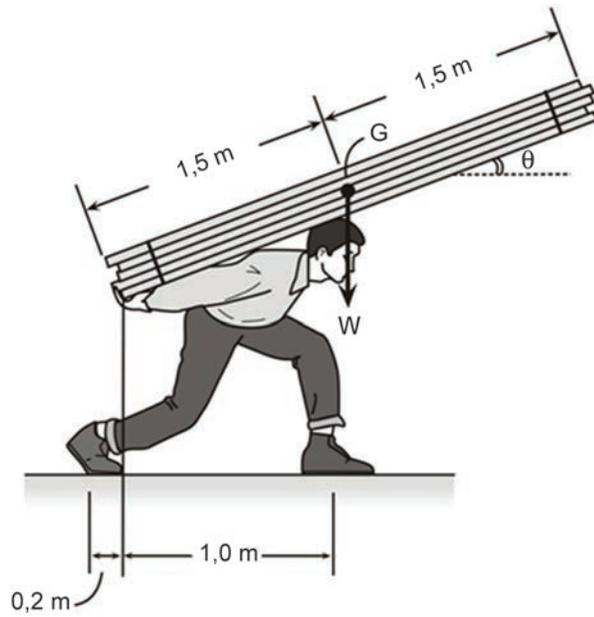


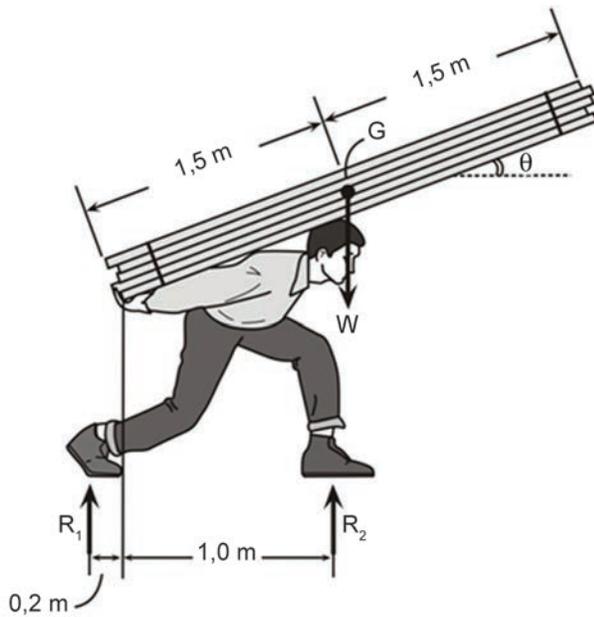
Figura 3.8 Situação real e modelo idealizado.

Problema 3.4 Uma pessoa deve carregar o conjunto de tábuas de peso W e centro de gravidade em G . Na posição mostrada, qual é o intervalo de valores de θ (0 a 90°) para que isso seja possível? Suponha que ela caminha em piso liso. Despreze o peso da pessoa:



Solução: a hipótese de caminhar em chão liso é hipotética para que possam ser desprezadas as forças de atrito, que não alteram a resolução desse exercício. Na verdade, caminhar em chão perfeitamente liso é impossível.

O DCL da pessoa mostra as forças externas atuantes:



Equações de equilíbrio:

$$\sum M_1 = 0: 1,2 \cdot R_2 - W \cdot (1,5 \cdot \cos \theta + 0,2) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow R_2 = W \cdot (1,5 \cdot \cos \theta + 0,2) / 1,2$$

$$\sum F_y = 0: R_1 + R_2 = W \rightarrow$$

$$\rightarrow R_1 = W - W \cdot (1,5 \cdot \cos \theta + 0,2) / 1,2 = W \left[1 - (1,5 \cdot \cos \theta + 0,2) / 1,2 \right]$$

$$R_1 = W(1 - 1,5 \cdot \cos \theta) / 1,2$$

Foram usadas apenas duas equações de equilíbrio – a equação de forças horizontais não acrescenta nenhum dado novo – e três incógnitas: R_1 , R_2 e θ . Os valores de R_1 e R_2 estão resolvidos em função de θ .

Sabe-se que as reações nos pés da pessoa (R_1 e R_2) só podem ser dirigidas para cima, ou seja, nesse problema não é possível ter valores negativos para essas incógnitas, pois isso é fisicamente impossível. Apenas o valor de R_1 pode ser negativo – o peso W tende a girar a pessoa no sentido horário. Note que o valor de R_2 é sempre positivo. Assim:

$$R_1 = W(1 - 1,5 \cdot \cos \theta) / 1,2 > 0 \rightarrow 1 - 1,5 \cdot \cos \theta > 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 > 1,5 \cdot \cos \theta \rightarrow \cos \theta < 2/3 \rightarrow \theta > 48,2^\circ$$

Problema 3.5 Resolva o problema anterior supondo $W = 0,7$ kN e considerando o peso da pessoa igual a $0,5$ kN atuando no meio de 1 e 2.

Solução:

$$\sum M_1 = 0: 1,2 \cdot R_2 - 0,7 \cdot (1,5 \cdot \cos \theta + 0,2) - 0,5 \cdot 0,6 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1,2 \cdot R_2 = 1,05 \cdot \cos \theta + 0,14 + 0,3 \rightarrow R_2 = 0,875 \cdot \cos \theta + 0,367$$

(sempre positivo)

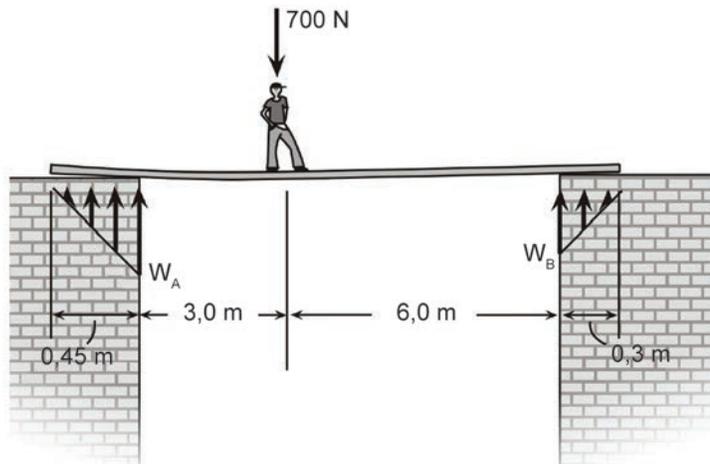
$$\sum F_y = 0: R_1 + R_2 = 0,5 + 0,7 \rightarrow R_1 = 1,2 - (0,875 \cdot \cos \theta + 0,367)$$

$$\rightarrow R_1 = 0,833 - 0,875 \cdot \cos \theta$$

Impondo novamente $R_1 > 0$: $\cos \theta < 0,952 \rightarrow \theta > 17,7^\circ$.

Observe que essa condição é mais favorável, pois o peso da pessoa ajuda a mantê-la em equilíbrio.

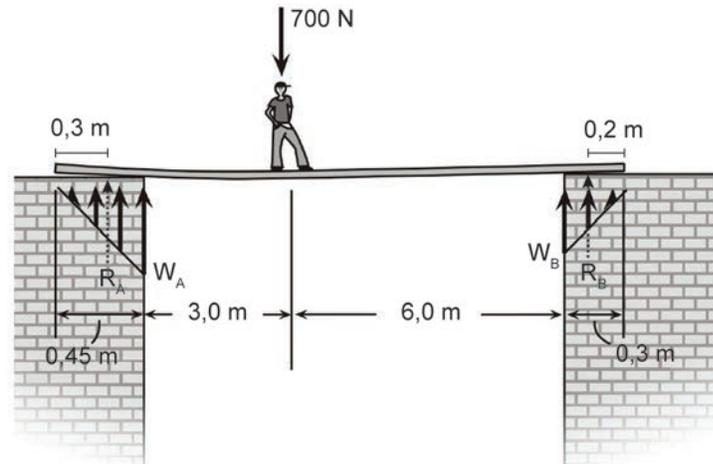
Problema 3.6 Uma prancha de madeira está apoiada entre dois prédios. Um garoto está parado na posição indicada. A prancha se deforma levemente e fica submetida à distribuição de carga triangular nas extremidades, cujos valores máximos valem w_A e w_B . Despreze a massa da prancha e calcule os valores de w_A e w_B , medidos em N/m:



Solução: o DCL da prancha mostra todas as forças externas a ela. As resultantes dos carregamentos triangulares passam no centro geométrico do diagrama. Para um triângulo, isso ocorre a $1/3$ da extensão do carregamento, em relação aos valores extremos w_A e w_B . A intensidade de cada uma vale a área do diagrama:

$$R_A = 0,45 \cdot w_A / 2$$

$$R_B = 0,3 \cdot w_B / 2$$



Equações de equilíbrio (desprezando $\sum F_x = 0$, que nada acrescenta):

a) $\sum M_A = 0$ (A se localiza no ponto de aplicação da resultante do carregamento triangular)

$$R_B \cdot (0,15 + 3 + 6 + 0,10) - 700 \cdot (3 + 0,15) = 0$$

$$R_B = 238,4 \text{ N}$$

Substituindo na equação obtida anteriormente:

$$R_B = 0,3 \cdot w_B / 2 \rightarrow 238,4 = 0,3 \cdot w_B / 2 \rightarrow w_B = 1589 \text{ N/m}$$

$$\text{b) } \sum F_y = R_A + R_B = 700 \rightarrow R_A = 461,6$$

Analogamente:

$$R_A = 0,3 \cdot w_A / 2 \rightarrow 461,6 = 0,45 \cdot w_A / 2 \rightarrow w_A = 2051 \text{ N/m}$$

3.5 Análise de estruturas

Neste item, serão estudados os casos de equilíbrio de corpos ou estruturas formadas por várias partes interligadas. São situações em que não somente se pretende limitar a abordagem à análise do corpo como um todo, mas também calcular as forças que mantêm as partes conectadas entre si.

Relativamente à estrutura inteira, essas forças são internas – ocorrem aos pares e se anulam –, mas são externas a cada parte tratada isoladamente quando participam do equacionamento do equilíbrio.

Serão ilustrados esses conceitos com a estrutura da Figura 3.9, ligada ao solo em A por um apoio fixo e em G por um cabo, conectado a ela em D. Ela é composta de várias partes, interligadas entre si por pinos de ligação.

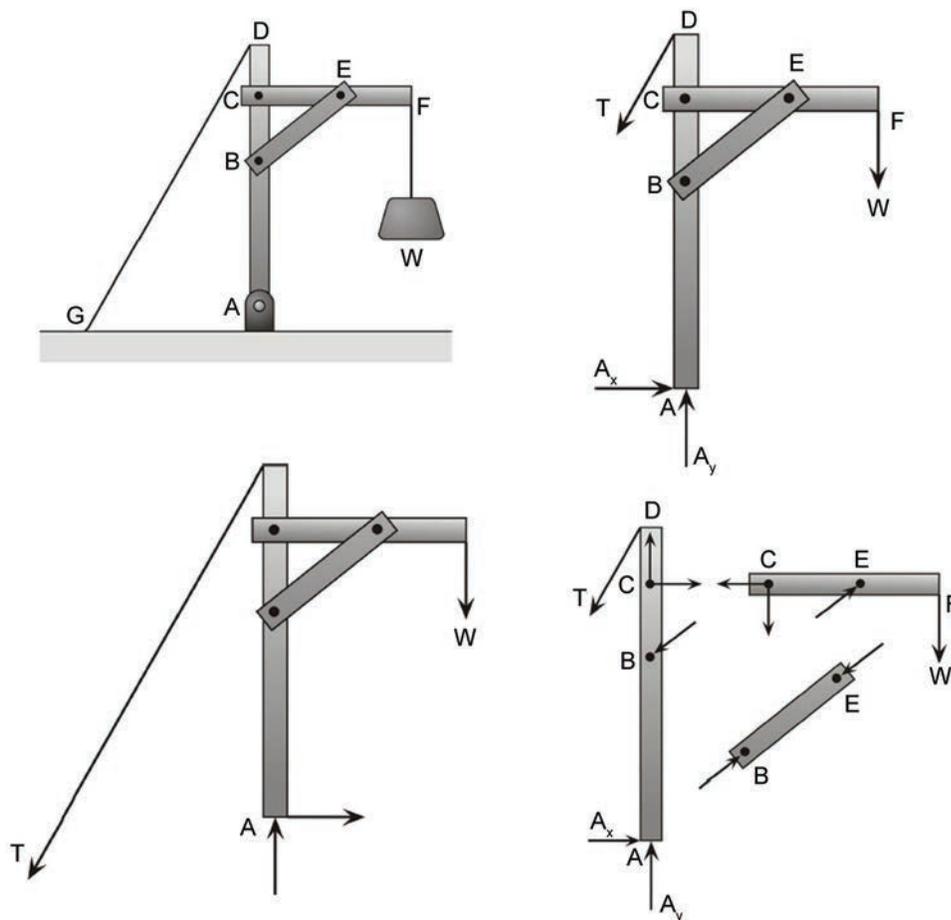


Figura 3.9 Forças internas numa estrutura composta.

Aqui, serão considerados apenas os tipos de estrutura em que as partes são ligadas por pinos, por serem ligações mais simples. Mas o raciocínio pode ser estendido a outras situações. O pino é uma idealização de uma ligação em que se impede que haja separação das partes (movimento de translação), mas não se impede o giro relativo entre elas, como uma dobradiça.

Numa estrutura estacionária, típica da engenharia, esse giro não ocorre, mas o equilíbrio se deve aos demais vínculos externos.

Podemos analisar o equilíbrio do guindaste inteiro empregando os conceitos até agora estabelecidos, com o DCL da Figura 3.9b): as forças externas são o

peso levantado pelo guindaste e as reações nos vínculos. As três incógnitas – duas forças de reação no apoio A, A_x e A_y , e uma força no cabo, T – podem ser calculadas pelo equilíbrio do guindaste. As forças internas que mantêm as partes ligadas não aparecem no DCL do guindaste.

Observe que se optou por representar o guindaste livre do cabo, isto é, sem o cabo, que, nesse caso, representa um vínculo, similar a um apoio móvel. Lembre-se de que um cabo só consegue resistir a forças axiais de tração, de modo que a direção e o sentido da força que o fio (vínculo) faz no guindaste são conhecidos.

A análise numérica desse problema seria idêntica caso se considerasse que o cabo pertencesse ao guindaste, já que as equações de equilíbrio seriam as mesmas. Mas, conceitualmente, o DCL correspondente a essa nova situação seria o mostrado na Figura 3.9c), em que aparece a força do solo no cabo, agora pertencente ao corpo estudado.

Ao separar o guindaste em partes e fazer o DCL de cada parte, as forças internas no guindaste passam a ser externas a cada parte, aparecendo em cada DCL, como se mostra na Figura 3.9d). Nessa representação, a força que uma parte S exerce numa parte Q, no ponto em que estão ligadas, tem a mesma direção e intensidade, mas sentido contrário à força que a parte Q exerce na parte S. São forças de ação e reação (Terceira Lei de Newton). Quando da montagem do DCL das várias partes do guindaste, esse fato já deve ser incorporado ao desenho.

A separação da estrutura, desmembrando-a em suas partes, é importante para que se possam determinar as forças em cada uma, não se limitando a calcular as reações nos apoios da estrutura inteira. Isso é feito para que se possa dimensionar e projetar cada parte, além dos próprios elementos de ligação.

O problema é resolvido analisando separada e sucessivamente o equilíbrio de cada parte, para determinar todas as forças desconhecidas. Nesse exemplo, o problema envolve o cálculo de quatro forças internas, além das três já calculadas para a estrutura inteira – reações de apoio.

Sempre que possível, deve-se iniciar a resolução do problema por uma parte que tenha apenas três incógnitas, para que elas possam ser todas calculadas. Resultados obtidos numa parte devem ser usados na análise das outras, já que toda força sempre aparece em duas partes, ação e reação. Ou seja, não se escrevem indiscriminadamente as equações de equilíbrio de todas as partes, já que, muitas vezes, nem todas serão usadas, mas de forma seletiva e sequencial, evitando a solução de sistemas com muitas equações.

Na situação apresentada há nove equações independentes de equilíbrio referentes ao equilíbrio das três partes distintas. Excluindo as reações de apoio, que

podem ser determinadas pelo equilíbrio do guindaste inteiro, restam mais quatro forças incógnitas a determinar: C_x , C_y , B e E. Portanto, sobram equações.

No que diz respeito às forças que aparecem no DCL de cada componente, genericamente, sempre que uma barra está ligada à outra por um pino, as forças de ação e reação que elas trocam entre si, por meio do pino, têm direção qualquer, pois o movimento é impedido nas direções x e y. Nesses casos, se representa a força que uma parte faz na outra e vice-versa por um par de forças $-F_x$ e F_y , componentes de uma força de direção qualquer, cujos sentidos não se conhecem. Portanto, devem ser arbitrados.

Deve-se manter a coerência de colocar em cada parte letras iguais (mesma incógnita com sentidos opostos para cada par de forças num determinado pino). Ou seja, as forças comuns a dois elementos em contato têm mesmo módulo e direção, com sentidos opostos. Observe, por exemplo, que, na posição do pino C, foram colocadas forças C_x e C_y nas barras CEF e ABCD com sentidos opostos. Assim, não se adotam valores negativos.

Um eventual sinal negativo obtido na solução do problema não se refere ao sentido da força relativamente a um eixo x ou y, mas sim ao sentido arbitrado inicialmente para aquela força incógnita.

Rigorosamente, as forças de ação e reação não ocorrem entre as partes ligadas pelo pino, mas entre cada parte e o pino que as conecta entre si. Em um pino que liga duas partes Q e S, a parte Q exerce uma força no pino, que responde com uma força igual de sentido contrário. O mesmo ocorre com a parte S. O que permite concluir que essas forças são iguais é o estudo do equilíbrio do pino (tente perceber isso fazendo o DCL das partes e também do pino). Ou seja, tudo se passa como se o par de forças ação e reação ocorresse entre as partes Q e S.

Cuidado especial deve ser tomado quando mais de dois corpos estiverem conectados num pino, pinos com três barras ou duas barras ligadas num pino externo (apoio fixo). Essas situações são mais complexas, já que nelas não há um par de forças de ação e reação, mas três corpos interagindo.

Finalmente, repare que, na barra inclinada, apenas uma força de direção conhecida (a própria direção da barra) foi representada nas posições dos pinos B e E. Barras articuladas nas extremidades – ligadas por pinos – sem carregamento ao longo do vão sempre terão essa particularidade. Observe uma barra genérica com essas características mostrada na Figura 3.10:

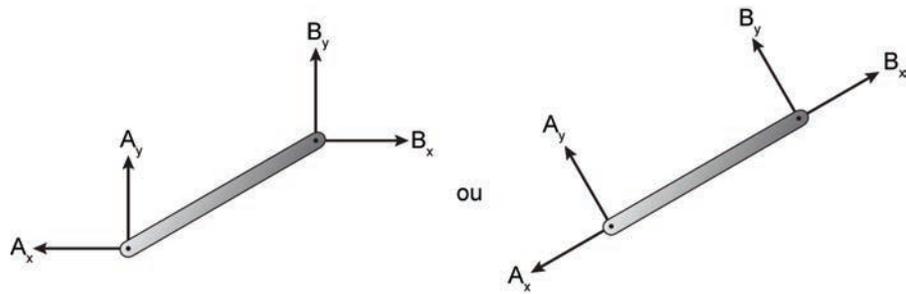


Figura 3.10 Barras articuladas nas extremidades sem força no vão.

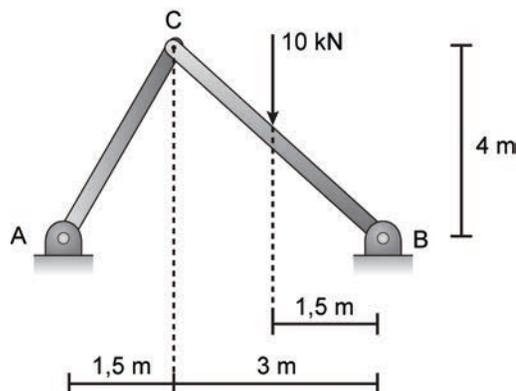
No estudo do equilíbrio dessa barra, pode-se representar no DCL um par de forças ortogonais F_x e F_y em cada pino de duas formas, como na figura. Por conveniência, o segundo caso será adotado (lembre-se de que uma força sempre pode ser decomposta relativamente a quaisquer dois eixos).

Estabelecendo a equação de equilíbrio de momento em relação a qualquer extremidade, chega-se à conclusão de que as forças transversais ao eixo da barra são nulas, restando apenas uma força axial:

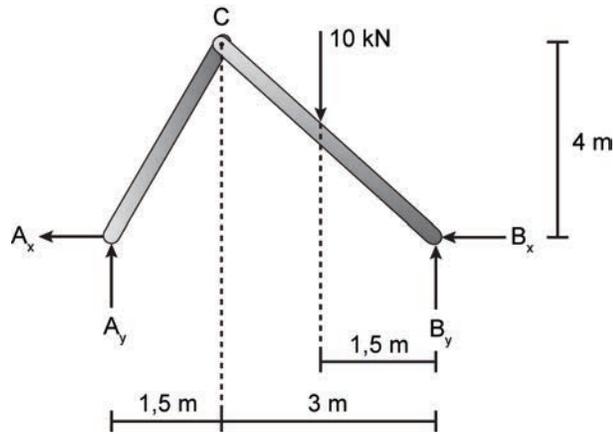
$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_y \cdot l_{\text{barra}} = 0 \rightarrow B_y = 0 \rightarrow \sum F_y = 0 \rightarrow A_y = 0$$

Note que isso só será verdade caso não haja outras forças atuantes na barra. Assim, sempre que aparecer uma barra desse tipo, essa conclusão pode ser previamente utilizada, o que facilita os cálculos. É como se se estivesse fazendo antecipadamente o equilíbrio da barra.

Problema 3.7 Calcule as reações nos apoios A e C e as forças no pino C da estrutura. Os apoios em A e B são fixos:



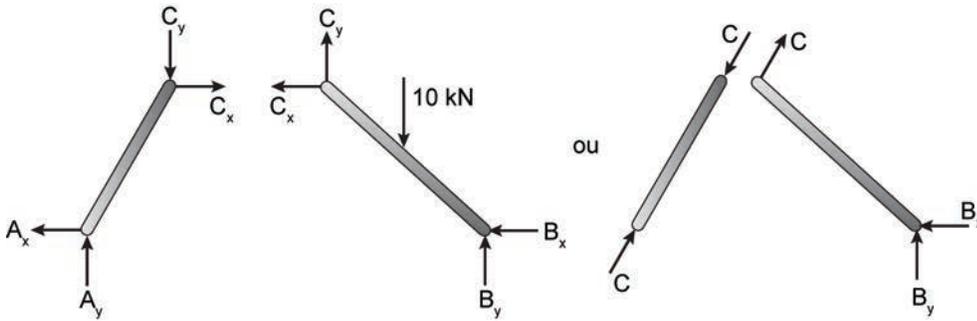
Solução: há indeterminação externa, estrutura hiperestática (dois apoios fixos): três equações de equilíbrio do corpo inteiro e quatro incógnitas para as reações dos apoios. Apesar de não ser possível calcular as quatro forças de reação, serão determinadas as reações verticais nos apoios:



$$\sum M_A = 0 \rightarrow -10 \cdot 3 + 4,5 \cdot B_y = 0 \rightarrow B_y = 6,67 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - 10 = 0 \rightarrow A_y = 3,33 \text{ kN}$$

Prosseguir-se-á fazendo o DCL das duas partes isoladas, desmembrando a estrutura:



Com o DCL da figura da esquerda, barra AC. Voltando à estrutura inteira:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -A_x + B_x = 0 \rightarrow B_x = -(-1,25) = 1,25 \text{ kN}$$

Ainda se poderia conferir o valor de B_y – calculado com a análise do equilíbrio do corpo original – com as equações de equilíbrio da barra BC:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow C_y - 10 + B_y = 0 \rightarrow B_y = 10 - 3,33 \rightarrow B_y = 6,67 \text{ kN}$$

O mesmo resultado pode ser obtido usando o DCL da figura da direita, como se mostra a seguir. Nesse caso, já se parte do fato conhecido de que a barra AC é do tipo articulada nas extremidades sem carga aplicada no vão.

Então, no pino C, a direção da força é coincidente com a direção da barra AC, por conseguinte a reação no apoio A também se torna conhecida pela análise do equilíbrio da barra AC. As incógnitas C e B_x serão calculadas pela análise do equilíbrio do trecho BC. As componentes vertical e horizontal da força C valem $0,936C$ e $0,351C$, respectivamente (pela geometria dada):

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -0,936 \cdot C \cdot 3 - 0,351 \cdot C \cdot 4 + 10 \cdot 1,5 = 0 \rightarrow C = 3,56 \text{ kN}$$

$$(\text{ou } C_x = 1,25; C_y = 3,33)$$

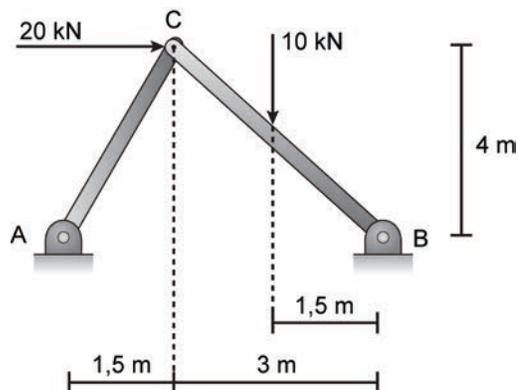
Voltando à estrutura inteira:

$$-A_x - B_x = 0 \rightarrow A_x = -1,25 \text{ kN}$$

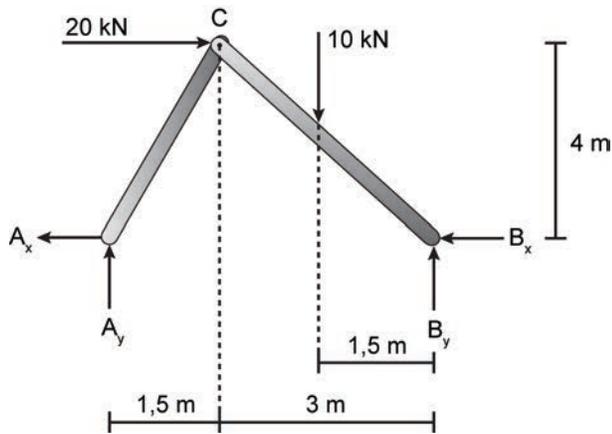
Observe que as componentes da reação em A somadas vetorialmente devem resultar igual a C (com direção coincidente à direção da barra AC):

$$A = C = (1,25^2 + 3,33^2)^{0,5} = 3,56 \text{ kN}$$

Problema 3.8 Repita o problema anterior, acrescentando a força aplicada no pino C:



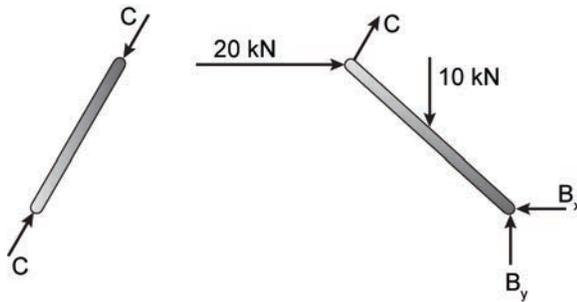
Solução: estrutura inteira.



$$\sum M_A = 0 \rightarrow -20 \cdot 4 - 10 \cdot 3 + 4,5 \cdot B_y = 0 \rightarrow B_y = 24,44 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - 10 = 0 \rightarrow A_y = -14,44 \text{ kN} \quad (\text{para baixo})$$

DCL das barras separadas:



Barra BC:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -0,936 \cdot C \cdot 3 - 0,351 \cdot C \cdot 4 + 10 \cdot 1,5 - 20 \cdot 4 = 0$$

$$\rightarrow C = -15,43 \text{ kN} \quad (\text{sentido contrário ao adotado})$$

$$\text{Nota: } C_x = 0,351 \cdot C; C_y = 0,936 \cdot C$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 20 + 0,351 \cdot C - B_x = 0 \rightarrow B_x =$$

$$= 20 + 0,351 \cdot (-15,43) \rightarrow B_x = 14,58 \text{ kN}$$

Voltando à estrutura original:

$$A_x + B_x = 20 \rightarrow A_x = 5,42 \text{ kN}$$

Observe que, pelo equilíbrio da barra AC, as componentes da reação em A somadas vetorialmente devem resultar igual a C – com a direção da barra AC:

$$(5,42^2 + 14,44^2)^{0,5} = 15,43 \text{ kN}$$

Uma dúvida muito frequente ocorre quando há forças aplicadas nos pinos de ligação, como a força horizontal de 20 kN aplicada no pino C. O que fazer com ela? Considerá-la no DCL de qual corpo, já que ela está aplicada exatamente na junção das duas barras?

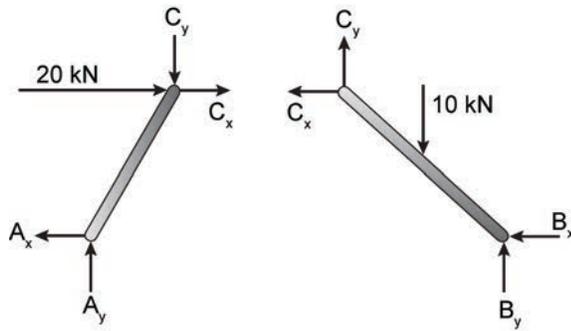
Tanto faz representá-la na barra da esquerda ou da direita ou repartida de alguma forma entre elas. O resultado final não se altera.

Na solução apresentada, foi considerada a força horizontal no DCL da barra da direita (BC). Caso fosse considerada na barra AC, o resultado seria o mesmo, mas não se poderia adotar a simplificação de que, nessa barra, a força é conhecida, pois, nesse caso, a barra AC não se enquadra mais no esquema da Figura 3.10 (barra especial).

Refazer-se-á o problema supondo que a força horizontal esteja aplicada na barra da esquerda (AC), adotando o DCL das barras conforme a figura seguinte, em que não se aplicou a análise antecipada da barra AC (ou seja, não se considerou conhecida a direção da força em C).

Em cada barra, há três equações de equilíbrio e quatro incógnitas, mas duas se repetem (no pino C), ou seja, há seis equações e seis incógnitas no total. Portanto, o sistema tem solução. Além disso, já se conhecem as duas reações verticais nos apoios A e B, o que significa que sobram equações de equilíbrio.

Mesmo que não se tivesse feito antes o equilíbrio da estrutura inteira para calcular as componentes verticais das reações nos apoios, ainda se poderia resolver todas as incógnitas. Mas se teria mais trabalho quando se fosse analisar o equilíbrio de cada parte. Por isso, é sempre interessante fazer o DCL da estrutura inteira para conseguir calcular o maior número possível de incógnitas nos apoios:



Barra AC (usando os valores de A_y e B_y calculados para a estrutura inteira):

$$\sum M_c = 0 \rightarrow -A_y \cdot 1,5 - A_x \cdot 4 = 0 \rightarrow -(-14,44) \cdot 1,5 - A_x \cdot 4 = 0$$

$$\rightarrow A_x = 5,42 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow C_x + 20 - A_x = 0 \rightarrow C_x + 20 - 5,42 = 0 \rightarrow C_x = -14,58 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow C_y + B_y + 10 = 0 \rightarrow C_y = 14,44 \text{ kN}$$

BC:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -C_x - B_x = 0 \rightarrow B_x = 14,58 \text{ kN}$$

Assim, todas as forças resultaram iguais à solução anterior. Observe que no pino C a resultante das forças é igual nos dois casos, tanto para a barra AC quanto para a BC.

3.5.1 Síntese da análise de estruturas

Nas estruturas compostas, recomenda-se sempre fazer o DCL da estrutura inteira para calcular as reações de apoio, quando possível. A seguinte sequência de procedimentos é indicada:

- Desmembrar a estrutura separando-a nos pinos de ligação e fazer o DCL de cada elemento;
- Identificar a presença de barras articuladas nas extremidades sem forças aplicadas no trecho. Para elas, devem-se considerar forças iguais e opostas nos respectivos pinos, na direção da barra. Não usar sinais negativos.

Na posição em que essa barra estiver ligada a outra, colocar uma força com a mesma direção, mas de sentido contrário;

- Nos demais elementos, colocar duas forças ortogonais – sentidos arbitrários – nas posições dos pinos, mantendo as mesmas letras para cada pino e trocando apenas o sentido das forças, forças de ligação. Novamente, não usar sinais. Não se esquecer de colocar as forças aplicadas e as reações (estas últimas, se já calculadas, com seus sentidos corretos);
- Na análise de cada elemento, selecionar a equação a empregar, evitando resolver equações simultâneas (sistemas). Muitas vezes, uma boa dica é procurar um ponto para equacionar o momento pelo qual passam todas as forças desconhecidas, exceto uma. Valores de incógnitas calculados são utilizados em outros elementos em que a incógnita aparece, respeitando-se os sinais;
- Sinais negativos obtidos indicam que o sentido arbitrado no início era o contrário. Quando houver equações excedentes, podem-se usá-las para checar os cálculos. Afinal, todas as equações devem ser satisfeitas.

3.6 Considerações finais

Na análise de um problema de equilíbrio de corpo rígido, deve-se idealizar um modelo (apoios, forças atuantes etc.). Esquematiza-se o contorno do corpo isolado a estudar, “livre” de suas restrições e conexões, com todas as forças atuantes: módulo, direção e sentido. Valores desconhecidos devem ser representados por símbolos ou letras apropriados, um sistema de eixos de referência auxilia a identificação. Todas as dimensões importantes para o cálculo dos momentos das forças devem ser indicadas. O DCL do corpo estará pronto. Este deve ser sempre o primeiro passo na resolução dos problemas de equilíbrio.

Toda restrição de rotação e translação – em cada direção – proporcionada pelos apoios resulta em momento e força aplicada no corpo. Forças internas nunca aparecem no DCL, pois ocorrem aos pares, e seus efeitos no estudo do equilíbrio se anulam.

Na aplicação das equações de equilíbrio, preferencialmente deve-se organizá-las de forma que cada equação forneça diretamente o valor de uma incógnita, evitando a resolução de sistemas de equações. Caso a solução resulte num escalar negativo para alguma incógnita (força ou momento), isso indica que o sentido dessa grandeza é contrário ao inicialmente assumido no DCL.

UNIDADE 4

Centroides e momentos de inércia

4.1 Primeiras palavras

Nesta unidade, será calculado e entendido o significado de CG (Centro de Gravidade), C (centroide) e momento de inércia I de figuras planas. O CG é o ponto de aplicação da força-peso. O centroide é o centro geométrico. Quando um corpo é constituído de material homogêneo, o CG coincide com o C.

Num martelo, o centroide não coincide com o centro de gravidade. Relativamente à extremidade do cabo, o centro de gravidade está mais distante do que o centroide, pois o cabo é mais leve. Esse raciocínio vale para corpos tridimensionais, bidimensionais ou lineares. Concentrar-se-á apenas nos casos de figuras planas – qualquer seção transversal de um corpo –, pois a maioria das aplicações ocorre para essa situação.

O momento de inércia é outra característica geométrica importante de uma figura plana, muito empregada em diversas formulações da engenharia. É definido sempre em relação a algum eixo, calculado por meio da integral do produto de um elemento de área infinitesimal pela sua distância ao quadrado até o referido eixo.

4.2 Problematizando o tema

O peso é sempre uma força vertical dirigida para baixo e representa a resultante das forças de atração exercidas pela Terra sobre os corpos. Por definição, o centro de gravidade é o ponto de aplicação da força-peso.

Imagine que você vai suspender uma placa retangular com um fio. Em que ponto o fio deve ser fixado à placa para que ela fique em equilíbrio? Ao fazer o DCL da placa, as únicas forças que aparecem são o seu peso e a força que o fio exerce na placa. Foi visto que, num corpo em equilíbrio submetido à ação de apenas duas forças, elas obrigatoriamente passam pelo mesmo ponto e têm o mesmo valor e sentidos opostos. Assim, a linha de ação do fio tem de passar pelo CG da placa. Caso contrário, ela não ficará em equilíbrio, pois a equação de equilíbrio de momento não pode ser satisfeita. Essa situação é ilustrada na Figura 4.1. Em a), a placa fica em equilíbrio; e em b) a placa gira e busca a posição de equilíbrio indicada em c):

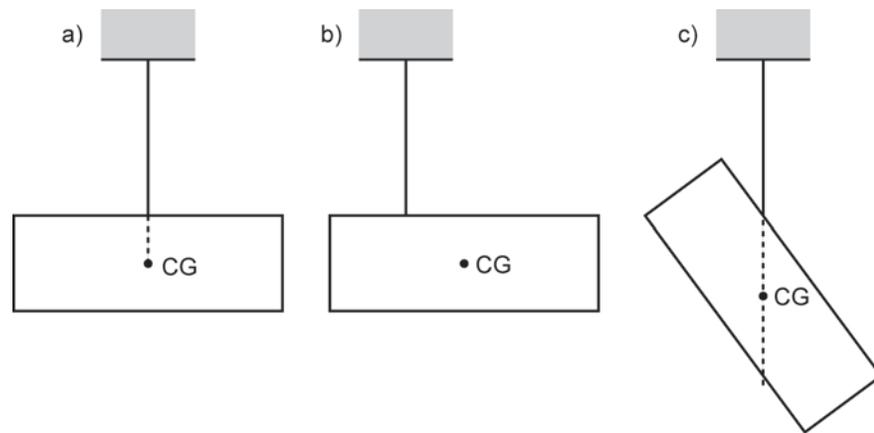


Figura 4.1 Placa suspensa por um fio: situações a e c em equilíbrio.

Imagine também uma régua plástica sustentada em suas extremidades pelas suas duas mãos. Peça a alguém que aplique uma força vertical no meio da régua, observe como ela se deforma. Gire a régua em torno de seu eixo longitudinal, segurando-a na sua posição “em pé”. Repita o procedimento. Ela praticamente não se deforma. Isso ocorre porque, nesse caso, o momento de inércia da régua, relativo ao eixo do centroide, é muito maior que no primeiro caso. A deformação varia de forma inversamente proporcional com essa grandeza. Esta é uma aplicação importante do conceito de momento de inércia.

4.3 Centroide de figuras planas

Consulte uma bibliografia mais detalhada para entender como se obtêm as fórmulas para calcular o centro de gravidade de um corpo qualquer. Dividindo-o em elementos infinitesimais, as expressões são obtidas igualando-se o momento provocado pela resultante da força-peso – aplicada no CG – com a soma dos momentos provocados pelas componentes infinitesimais da força-peso, todos calculados relativamente a eixos cartesianos previamente estabelecidos como sistema de referência. Lembre-se de que já foi utilizada essa propriedade anteriormente (teorema de Varignon). As expressões obtidas para eixos retangulares x e y são:

$$P \cdot x_{cg} = \int x \cdot dP \quad (4.1)$$

$$P \cdot y_{cg} = \int y \cdot dP \quad (4.2)$$

em que: P = peso do corpo; dP = peso de um elemento infinitesimal, cujo ponto de aplicação é conhecido; x_{cg} e y_{cg} = coordenadas do centro de gravidade; x e y = distância do CG do elemento infinitesimal até os eixos do sistema de referência adotado, em relação ao qual se calcula a posição do CG.

Caso a espessura do corpo seja constante, e o material constituinte seja homogêneo, os valores do peso ficarão proporcionais às respectivas áreas. Assim, se obtêm as expressões para o cálculo do centroide:

$$A \cdot x_c = \int x \cdot dA \quad (4.3)$$

$$A \cdot y_c = \int y \cdot dA \quad (4.4)$$

em que: x_c e y_c = coordenadas do centroide da seção; dA = área de um elemento infinitesimal; x e y = idem ao exposto na expressão anterior.

Os limites da integral são tais que cobrem toda a figura.

As integrais $\int x \cdot dA$ e $\int y \cdot dA$ são conhecidas como momento de primeira ordem ou momento estático da área A em relação aos eixos y e x , respectivamente.

O centroide sempre coincidirá com o centro de gravidade de figuras planas caso se considere que todas as partes da figura sejam do mesmo material. Na engenharia, o uso do centroide é mais frequente que o do centro de gravidade.

4.3.1 Cálculo do centroide por integração

A escolha do elemento infinitesimal de área deve priorizar a facilidade dos cálculos. Caso se trabalhe com um elemento retangular ($dx \cdot dy$), é necessário resolver uma integral dupla – duas variáveis. Ao escolher um elemento com apenas uma incógnita, basta uma integração simples para cobrir todo o domínio.

Exemplificar-se-á com o cálculo do centroide de um retângulo, sabidamente localizado no encontro das diagonais, como ilustrado na Figura 4.2:

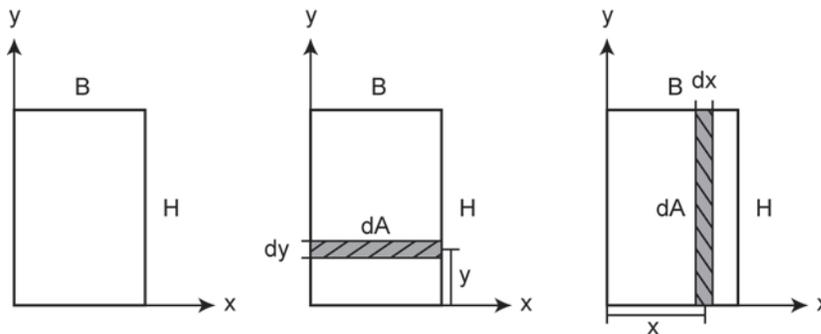


Figura 4.2 Procedimentos para cálculo do centroide do retângulo.

Inicialmente, se estabelecem os eixos x e y de referência, relativamente aos quais são calculados x e y do centroide. Uma boa prática é adotar um

sistema de eixos de modo a ter apenas coordenadas positivas – figura situada num quadrante positivo.

Para calcular o valor de y_c , na escolha do elemento de área infinitesimal, é conveniente adotar um retângulo de base B e espessura dy – elemento paralelo ao eixo x –, de tal forma que haja apenas a variável y na integral. A variável y da integral representa a distância na vertical do CG do elemento até o eixo x . Ela é definida, pois todos os pontos do elemento genérico distam y do eixo x . Ou seja, este é um elemento conveniente.

Os limites da integração, correspondentes aos elementos extremos, são zero e H : assim, todos os elementos de área somados na integração cobrem a figura:

$$A \cdot y_c = \int y \cdot dA = \int y \cdot B \cdot dy = \int_0^H B \cdot y \cdot dy = B \cdot H^2/2$$

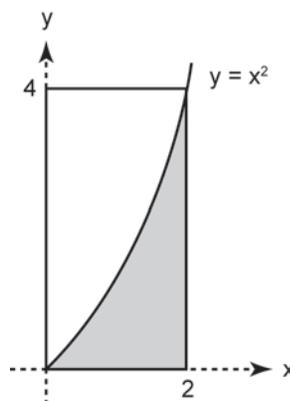
$$\text{com } A = B \cdot H \rightarrow y_c = B \cdot H^2/2 / B \cdot H = H/2$$

Nos casos em que não se conhece a área:

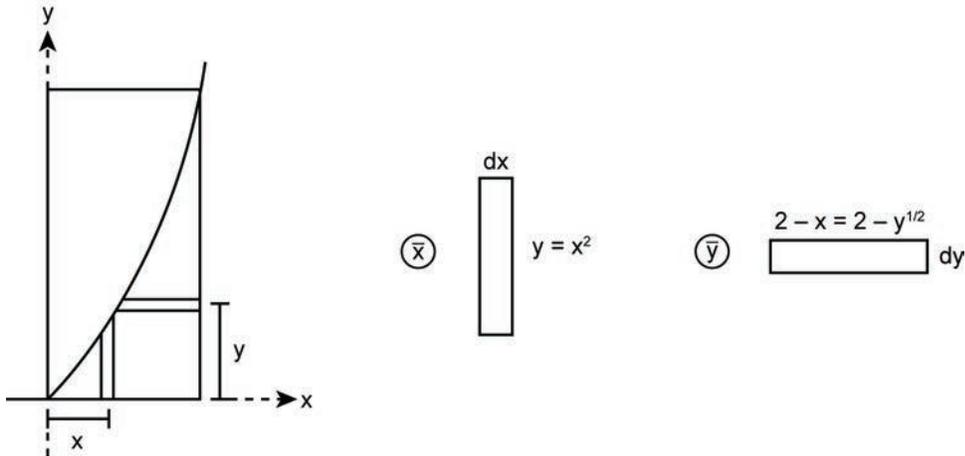
$$A = \int dA = \int B \cdot dy = \int_0^H B dy = B \cdot H$$

Analogamente, para o cálculo de x , adota-se um retângulo de altura H e largura dx e repete-se o procedimento. Consulte uma bibliografia mais detalhada para o cálculo de centroide de figuras com formas circulares, em que o emprego de coordenadas polares é mais conveniente.

Problema 4.1 Calcule a posição do centroide da área destacada, compreendida pela parábola e o eixo x dado, calculado relativamente aos eixos cartesianos representados:



Solução:



Cálculo de x_c : tomando um elemento infinitesimal genérico paralelo ao eixo y : $dA = h \cdot dx$.

A distância desse elemento até o eixo y é a variável x da integral, sendo definida para cada elemento. Para um elemento genérico identificado pelas coordenadas (x,y) da curva dada, ela é igual ao próprio x da curva.

O valor de h varia conforme a posição do elemento genérico. Pode-se escrever h em função de x ou y , sendo mais conveniente fazê-lo em função de x para manter a integral com apenas uma variável.

Para um elemento genérico identificado pelas coordenadas (x,y) da curva dada, a altura h é o próprio valor y da função parabólica:

$$h = y = x^2$$

$$A \cdot x_c = \int x \cdot dA = \int x \cdot h \cdot dx = \int x \cdot x^2 \cdot dx = \int_0^2 x^3 \cdot dx = \frac{x^4}{4} = 4$$

$$A = \int dA = \int h \cdot dx = \int_0^2 x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} = \frac{8}{3} \rightarrow x_c = 4 \cdot 3/8 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_c = 1,5 \text{ u.c.}$$

Cálculo de y_c : tomando um elemento infinitesimal paralelo ao eixo x : $dA = b \cdot dy$.

A distância desse elemento até o eixo x é a variável y da integral. Para um elemento genérico identificado pelas coordenadas (x,y) da curva dada, a distância y é definida igual ao próprio y da curva.

O valor de b varia conforme a posição do elemento genérico. Para um elemento genérico identificado pelas coordenadas (x,y) da curva dada, tem-se:

$$b = (2 - x); \text{ cuidado, pois } b \neq x.$$

$$b = (2 - y^{0,5})$$

$$A \cdot y_c = \int y \cdot dA = \int y \cdot b \cdot dy = \int y \cdot (2 - y^{0,5}) \cdot dy = \int_0^4 (2y - y^{1,5}) \cdot dy = y^2 - \frac{2y^{2,5}}{5}$$

$$A \cdot y_c = 16 - 12,8 = 3,2 \rightarrow y_c = 3,2 \cdot 3/8 \rightarrow y_c = 1,2 \text{ u.c.}$$

Problema 4.2 Usando a figura do Problema 4.1, calcule o centroide da figura compreendida pela parábola e o eixo y .

Solução: cálculo de x_c : a única diferença relativa ao exemplo anterior ocorre para a função $h(x)$. Nesse caso, para um elemento genérico identificado pelas coordenadas (x,y) da curva dada, tem-se:

$$h = 4 - y = 4 - x^2$$

$$A \cdot x_c = \int x \cdot dA = \int x \cdot h \cdot dx = \int x \cdot (4 - x^2) \cdot dx = \int_0^2 (4x - x^3) \cdot dx = 2x^2 - \frac{x^4}{4} = 4$$

$$A = \int dA = \int h \cdot dx = \int_0^2 (4 - x^2) \cdot dx = 4x - \frac{x^3}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_c = 4 \cdot 3/16 \rightarrow x_c = 0,75 \text{ u.c.}$$

Cálculo de y_c : novamente a única alteração se refere ao valor da função $b(y)$:

$$b = x$$

$$b = y^{0,5}$$

$$A \cdot y_c = \int y \cdot dA = \int y \cdot b \cdot dy = \int y \cdot y^{0,5} \cdot dy = \int_0^4 y^{1,5} dy = \frac{2y^{2,5}}{5}$$

$$A \cdot y_c = 12,8 \rightarrow y_c = 12,8 \cdot 3/16 \rightarrow y_c = 2,4 \text{ u.c.}$$

4.3.2 Simetria

Quando uma seção apresenta um eixo de simetria, o centroide se localiza nesse eixo. Por exemplo: se o eixo de simetria for um eixo x , para cada elemento de área dA situado a uma distância y até o eixo de simetria corresponderá um outro elemento de área idêntico, situado a uma distância $-y$ até o mesmo eixo. Assim, o momento total de todos os elementos em relação ao eixo de simetria, representado pela expressão $\int ydA$, será nulo. Portanto, a ordenada y do centroide, calculada em relação ao eixo de simetria, será nula, pois é nulo o numerador da expressão. Ou seja, o centroide se localiza sobre o eixo. Uma consequência óbvia é que seções com dois eixos de simetria têm o centroide posicionado no encontro desses eixos.

4.3.3 Figuras compostas

Na prática da engenharia, é muito comum trabalhar com seção composta, formada pela composição de várias partes “simples” (retângulos, triângulos, semi-círculos etc.), das quais se conhece a posição do centroide, calculada por integração e posteriormente tabelada. Por isso, a determinação do centroide por meio da integração é importante.

A seção composta pode ser dividida nas partes conhecidas e o procedimento para o cálculo do centroide é análogo ao realizado anteriormente, quando se trabalhou com áreas infinitesimais.

Para definir as partes constituintes da figura composta, é necessário que se conheça – por meio de valores tabelados – o centroide delas, mais precisamente o ponto de aplicação da respectiva força-peso. Deve-se dividir a figura no menor número possível de partes conhecidas. As expressões resultantes para o cálculo do centroide são apresentadas a seguir:

$$A \cdot x_c = \sum x_i \cdot A_i \quad (4.5)$$

$$A \cdot y_c = \sum y_i \cdot A_i \quad (4.6)$$

A integral cede lugar ao somatório, pois não há mais elementos infinitesimais de área. A quantidade de parcelas somadas corresponde ao número de partes constituintes da figura. No caso de haver um buraco de geometria “conhecida”, ele é considerado como uma área negativa, que foi retirada da figura original.

A Figura 4.3 mostra um exemplo de uma figura composta, constituída por um retângulo e dois triângulos. Para cada uma dessas partes, se conhece o respectivo centroide. Para a área A_2 , as distâncias y_2 e x_2 do centroide C_2 até os eixos x e y de referência, que entram no somatório, estão representadas na figura para ilustrar. Para esse exemplo:

$$A \cdot x_c = \sum x_i \cdot A_i = x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3$$

$$\text{com } A = A_1 + A_2 + A_3$$

Para a direção y , o procedimento é análogo:

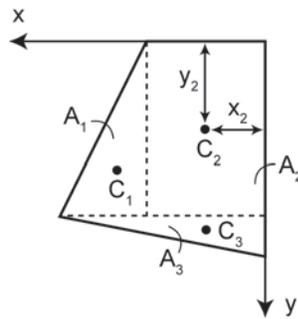
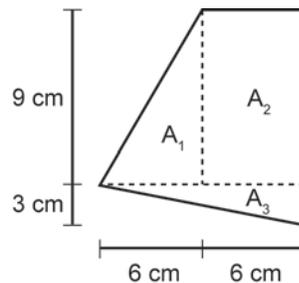
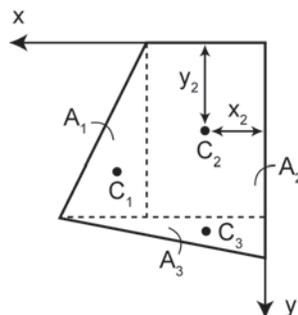


Figura 4.3 Exemplo de figura composta.

Problema 4.3 Calcule a posição do centroide da figura indicada:



Solução: inicialmente se estabelecem os eixos de referência, relativamente aos quais o centroide será calculado. Dividindo-se a figura conforme comentado no item anterior e aplicando as equações 4.5 e 4.6:



$$A \cdot y_c = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 = 27 \cdot 6 + 54 \cdot 4,5 + 18 \cdot 10$$

$$(27 + 54 + 18) \cdot y_c = 585$$

$$y_c = 5,91 \text{ cm}$$

$$A \cdot x_c = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 = 27 \cdot 8 + 54 \cdot 3 + 18 \cdot 4$$

$$(27 + 54 + 18) \cdot x_c = 450$$

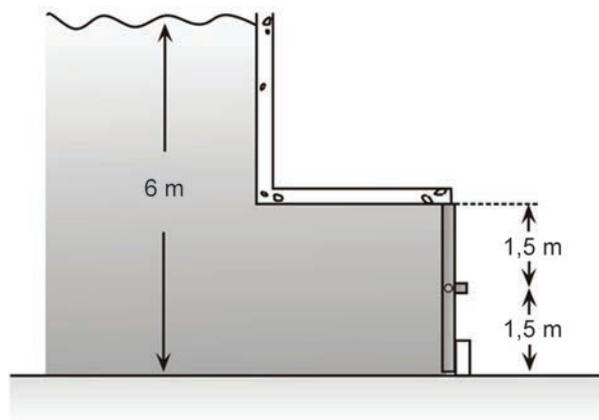
$$x_c = 4,55 \text{ cm}$$

4.3.4 Outras aplicações

Uma aplicação importante do cálculo do centroide é a determinação do ponto de atuação da resultante de um carregamento distribuído. Já vimos, na unidade anterior, que esse ponto passa pelo centroide do diagrama representativo do carregamento. Para carregamentos uniformemente distribuídos em barras, um diagrama retangular é utilizado para representá-los, pois a intensidade do carregamento não varia. Portanto, o ponto de aplicação se situa no meio do carregamento – ver Problema 3.3. Para outros tipos de carregamento, basta localizar o centroide correspondente ao diagrama que representa o carregamento – ver Problema 3.6.

Outra aplicação importante ocorre nas situações de corpos submersos em líquidos incompressíveis submetidos à pressão da água, como se mostra no problema seguinte.

Problema 4.4 Uma comporta retangular de largura igual a 3 m está rotulada no ponto A e impedida de girar devido a um pequeno bloco em B. Sabendo que o peso específico da água vale 10 kN/m^3 , calcule os valores das forças exercidas pela comporta nos apoios A e B decorrentes da ação da água na comporta:



Solução:

pressão exercida pela água: $p = \gamma \cdot h = 10 \cdot h$ ($\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$)

para $h = 3 \text{ m} \rightarrow p = 30 \text{ kN/m}^2$

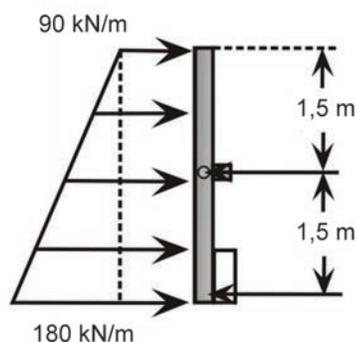
para $h = 6 \text{ m} \rightarrow p = 60 \text{ kN/m}^2$

força exercida pela água: força = $p \cdot \text{largura} = p \cdot 3$ (força distribuída ao longo da altura da comporta)

para $h = 3 \text{ m} \rightarrow f = 90 \text{ kN/m}$

para $h = 6 \text{ m} \rightarrow f = 180 \text{ kN/m}$

O DCL da comporta mostra as forças exercidas pela água e pelos apoios A e B. Os sentidos de A e B foram arbitrados:



Portanto, as forças decorrentes da ação da água correspondem a uma distribuição em forma de um trapézio. A resultante é igual à área do trapézio e o ponto de aplicação está no centroide dele, que pode ser calculado dividindo-o em um retângulo e um triângulo – partes conhecidas. Perceba que o centroide do trapézio não pode ser facilmente tabelado.

Outra opção, que, nesse caso, é mais simples, é tratar o carregamento como a soma de um carregamento triangular e um retangular, cujos pontos de aplicação e as resultantes são conhecidos. Prosseguir-se-á com essa segunda alternativa:

parte retangular: $R_r = 270 \text{ kN}$

parte triangular: $R_t = 135 \text{ kN}$

Equações de equilíbrio da comporta: entre as equações possíveis, escolheu-se:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow B \cdot 1,5 - 135 \cdot 0,5 = 0 \rightarrow B = 45 \text{ kN (para esquerda, como arbitrado);}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 270 + 135 - A - B = 0 \rightarrow A = 360 \text{ kN (para esquerda).}$$

Observação: no ponto A, a resultante R_r não provoca momento, pois passa pelo ponto.

Como o problema questiona a força exercida nos apoios (reações das forças calculadas), a resposta é $B = 45 \text{ kN}$ e $A = 360 \text{ kN}$, ambas dirigidas para a direita.

4.4 Momento de inércia

O momento de inércia é uma característica geométrica. No caso de figuras planas contidas num plano xy, por definição, tem-se:

$$I_x = \int y^2 \cdot dA \text{ momento de inércia da área A em relação ao eixo x} \quad (4.7)$$

$$I_y = \int x^2 \cdot dA \text{ momento de inércia da área A em relação ao eixo y} \quad (4.8)$$

Observe que ele resulta sempre um valor positivo – produto de área por uma distância elevada ao quadrado. Essas expressões aparecem frequentemente na engenharia, especialmente no cálculo de tensões e deformações de barras submetidas à flexão – assunto da Unidade 8. Por isso, aprender-se-á a calcular essa importante propriedade geométrica das figuras.

4.4.1 Cálculo por integração

O procedimento é análogo ao efetuado para o cálculo do centroide, alterando-se a expressão da integral. As variáveis x e y representam a distância do elemento infinitesimal até o eixo em que se calcula o momento de inércia. Relembre, no caso do centroide, que as distâncias correspondem ao eixo de referência, relativamente ao qual se situa a ordenada calculada.

Será ilustrada essa aplicação para o caso de um triângulo genérico calculando o momento de inércia relativo a um eixo x que passa pela base do triângulo (eixo x), conforme Figura 4.4a). Para o cálculo de I_x , será escolhido um elemento de largura b e espessura dy :

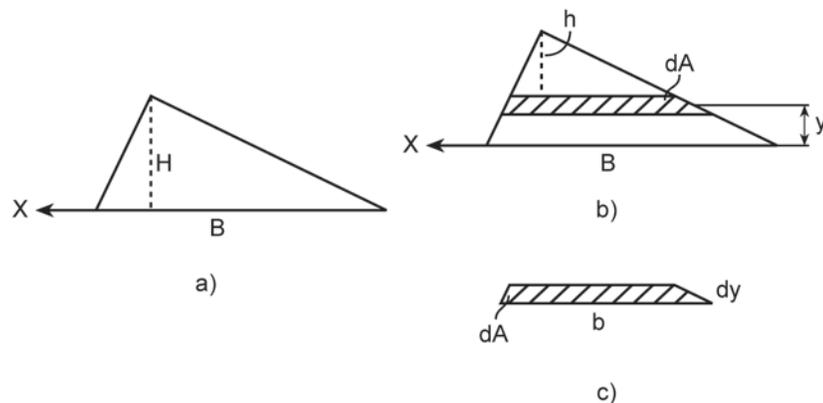


Figura 4.4 Esquemas para o cálculo do momento de inércia do triângulo relativo a um eixo x que passa pela sua base.

$$I_x = \int y^2 \cdot dA$$

y = distância do elemento infinitesimal até o eixo relativo ao qual será calculado o momento de inércia;

$dA = b \cdot dy$ quando dy tende a zero, caso do elemento infinitesimal, a figura correspondente a dA pode ser considerada um retângulo.

O valor de b muda para diferentes elementos, ou seja, é uma função que varia com x ou y . Será escrita em função de y para manter apenas uma variável na integral. Por semelhança de triângulos:

$$b/B = h/H \rightarrow b = B \cdot (H - y)/H$$

Assim,

$$dA = b \cdot dy = \frac{B(H-y)}{H} \cdot dy$$

$$I_x = \int y^2 \cdot dA = \frac{B}{H} \int y^2 \cdot (H-y) \cdot dy = \frac{B}{H} \int_0^H H \cdot y^2 \cdot dy - y^3$$

$$I_x = \frac{B}{H} \left(H \cdot \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) = \frac{B}{H} \left(\frac{H^4}{3} - \frac{H^4}{4} \right)$$

$$I_x = \frac{B \cdot H^3}{12}$$

Esse é o momento de inércia de um triângulo qualquer relativo a um eixo x coincidente com sua base.

Será calculado o momento de inércia do triângulo em relação a um outro eixo x , também paralelo à base mas que passa pelo centroide do triângulo, para observar como ele varia para cada eixo considerado. Nesse caso, a distância y da integral se refere à distância do elemento dA até esse novo eixo x .

Como visto anteriormente, o centroide do triângulo pode ser calculado por integração. Ele se localiza à distância de $1/3$ da altura relativa à sua base.

Tomando o mesmo elemento de área, o procedimento é análogo, exceto pela distância do elemento até o eixo considerado e pelos limites da integração.

A Figura 4.5 resume esses dados:

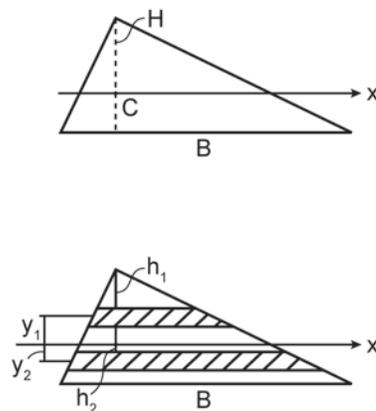


Figura 4.5 Momento de inércia de um triângulo em relação ao x que passa pelo centroide, paralelo à base.

$$I_x = \int y^2 \cdot dA \text{ com } dA = b \cdot dy$$

Na figura, representou-se dois elementos genéricos, situados acima e abaixo do eixo y, que tem ordenada positiva y_1 e negativa y_2 .

Por semelhança de triângulos e usando a mesma simbologia do caso anterior:

$$b/B = h/H$$

$$\text{Nesse caso, } h = (2H/3) - y \rightarrow b = B \cdot (2H/3 - y)/H$$

Essa expressão de h vale para qualquer elemento, inclusive os situados abaixo do ponto C, situação em que y é negativo:

$$I_x = \int y^2 \cdot dA = \frac{B}{H} \int y^2 \cdot \left(\frac{2H}{3} - y \right) \cdot dy = \frac{B}{H} \int_{-\frac{H}{3}}^{\frac{2H}{3}} \frac{2Hy^2}{3} dy - y^3 \cdot dy$$

$$\frac{H}{B} I_x = \left(\frac{2H}{3} \cdot \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) = \frac{2H}{3} \left(\frac{8H^3}{81} - \frac{4H^4}{81} \right) - \left(-\frac{2H H^3}{3 \cdot 81} - \frac{H^4}{4 \cdot 81} \right)$$

$$\frac{H}{B} I_x = \left(\frac{4H^2}{3 \cdot 81} + \frac{11H^4}{12 \cdot 81} \right)$$

$$I_x = \left(\frac{B \cdot H^3}{36} \right)$$

Esse é o valor do momento de inércia de um triângulo qualquer calculado em relação a um x paralelo à base que passa pelo centroide.

4.4.2 Teorema dos eixos paralelos

Demonstra-se que o momento de inércia de uma figura em relação a um eixo x qualquer é igual ao momento de inércia da figura em relação ao eixo x', que passa pelo centroide da figura somado com o produto da área da figura pela distância entre os eixos x e x' ao quadrado:

$$I_x = \bar{I}_x + A \cdot d^2$$

(4.9)

Observação: é usual representar com um traço acima da letra I o momento de inércia que se refere a um eixo do centroide.

Assim, conhecendo o momento de inércia de uma figura em relação a um eixo que passa pelo seu centroide, é sempre possível calcular o momento de inércia dessa figura em relação a qualquer outro eixo paralelo ao do centroide.

Perceba que, obrigatoriamente, o momento de inércia do lado direito da equação se refere a um eixo do centroide. Ou seja, não se podem relacionar os momentos de inércia de dois eixos paralelos quaisquer, exceto quando um se refere ao eixo do centroide. Por isso, se calculam e tabelam os valores de momento de inércia de figuras básicas referentes ao eixo do centroide.

Esse teorema é fundamental para o cálculo de momentos de inércia de figuras compostas, como se mostra a seguir.

4.4.3 Momento de inércia de figuras compostas

Conforme foi apresentado no item 4.3.3, uma área composta é formada pela associação de várias figuras mais simples. Para calcular o momento de inércia de figuras compostas, será adotado procedimento similar ao caso do centroide. Conhecendo o momento de inércia de cada parte constituinte, o momento de inércia da figura composta em relação a um eixo qualquer será a soma algébrica dos momentos de inércia de todas as partes calculadas em relação a esse mesmo eixo.

Exemplificar-se-á para o momento de inércia de uma figura composta em relação a um dado eixo x horizontal. Como a contribuição de cada parte se refere a esse eixo x , em que se pretende calcular o momento de inércia da figura composta, é preciso usar o teorema dos eixos paralelos, pois tem-se tabelado o valor do momento de inércia de cada figura simples em relação ao eixo x do seu centroide.

Aplica-se o teorema dos eixos paralelos para calcular o momento de inércia de cada parte em relação ao eixo x dado. O valor de d na equação 4.9 é a distância entre o eixo x dado e o eixo x do centroide da parte.

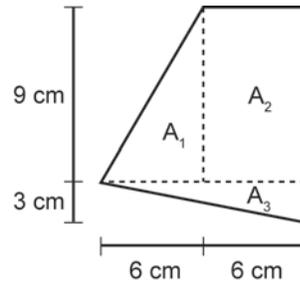
Fazendo sucessivamente para todas as partes e somando as contribuições, obtém-se o momento de inércia da figura composta. Caso haja um “vazio” ou “buraco”, considera-se a parcela negativa (ausência de área).

Normalmente, o valor do momento de inércia mais importante na engenharia se refere a eixos que passam pelo centroide dos corpos, que aparecem em diversas formulações.

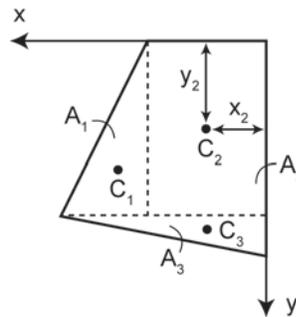
Problema 4.5 Calcule o momento de inércia da figura do Problema 4.3, em relação aos eixos:

a) eixo x dado;

b) x e y que passam pelo centroide da figura, paralelos aos eixos x e y dados:



Solução: a figura pode ser dividida em três partes: um retângulo (A_2) e dois triângulos (A_1 e A_3), das quais se conhecem a posição do centroide e o valor do momento de inércia em relação aos seus eixos do centroide:



a) cálculo de I_x (eixo x dado):

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$$

$$I_{x1} = 6 \cdot 9^3 / 36 + 27 \cdot 6^2 = 1093$$

$$I_{x2} = 6 \cdot 9^3 / 12 + 54 \cdot 4,5^2 = 1458 \text{ ou } 6 \cdot 9^3 / 3 \text{ direto em relação à base do retângulo}$$

$$I_{x3} = 12 \cdot 3^3 / 36 + 18 \cdot 10^2 = 1809$$

$$I_x = 4360 \text{ cm}^4$$

b1) determinação do centroide da figura – em relação aos eixos dados, considerados como referência: esses valores já foram calculados no Problema 4.3:

$$y_c = 5,91 \text{ cm}$$

$$x_c = 4,55 \text{ cm}$$

b2) cálculo dos momentos de inércia relativos ao centroide:

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$$

$$I_{x1} = 6 \cdot 9^3/36 + 27 \cdot (6 - 5,91)^2 = 121$$

$$I_{x2} = 6 \cdot 9^3/12 + 54 \cdot (4,5 - 5,91)^2 = 472$$

$$I_{x3} = 12 \cdot 3^3/36 + 18 \cdot (10 - 5,91)^2 = 310$$

$$I_x = 121 + 472 + 310$$

$$I_x = 904 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}$$

$$I_{y1} = 9 \cdot 6^3/36 + 27 \cdot (8 - 4,271)^2 = 375$$

$$I_{y2} = 9 \cdot 6^3/12 + 54 \cdot (3 - 4,27)^2 = 249$$

$$I_{y3} = 3 \cdot 12^3/36 + 18 \cdot (4 - 4,27)^2 = 145$$

$$I_y = 375 + 249 + 145$$

$$I_y = 817 \text{ cm}^4$$

Após ter calculado o valor de I_x , poderia ter sido usado o teorema dos eixos paralelos à figura total para calcular o valor \bar{I}_x . Utilizar-se-á essa relação apenas para conferir a resposta:

$$I_x = \bar{I}_x + A \cdot d^2$$

$$436004 + 99 \cdot 5,91^2$$

4.5 Figuras contidas num plano yz

Será destacada, abrindo um item especialmente para isso, a situação em que se tem uma seção contida num plano yz em vez do tradicional xy empregado até agora. Obviamente não há qualquer diferença, bastando fazer as adaptações necessárias relativamente às letras empregadas.

A razão para esse destaque é que na mecânica dos sólidos, tema das próximas três unidades, usualmente se trabalha com barras, nas quais a orientação de eixos adotada é: x para o eixo da barra e yz para uma seção transversal qualquer da barra, sendo y o eixo vertical e z o eixo horizontal. Assim, no que se refere ao estudo da seção transversal, você vai se deparar, por exemplo, com expressões de momento de inércia I_z em vez de I_x . E tudo é absolutamente igual ao que até agora foi feito, trocando o nome do eixo x por z.

4.6 Considerações finais

Nesta unidade, aprendeu-se a calcular centroides e momentos de inércia de figuras planas. Em ambos os casos, inicialmente determinou-se os valores dessas características geométricas por meio de integração numérica, aplicada a figuras simples ou padrões. Posteriormente, esses resultados (tabelados) foram utilizados na determinação dos valores de figuras compostas, em que essas figuras-padrão estão associadas. Essas características são fundamentais em várias aplicações da mecânica aplicada e da mecânica dos sólidos.

UNIDADE 5

Introdução à mecânica dos sólidos

5.1 Primeiras palavras

Na mecânica dos sólidos deformáveis, também conhecida como resistência dos materiais ou mecânica dos materiais, tensão e deformação são duas grandezas fundamentais. Por meio da análise da tensão, é possível avaliar o nível de sollicitação no interior do corpo. E pela deformação, é possível evitar grandes deslocamentos.

Entende-se por estrutura todo corpo ou conjunto de corpos agrupados de modo adequado a fim de suportar todas as sollicitações: esforços ativos e reativos, recalques de vínculos, cargas dinâmicas, variação de temperatura etc. Os corpos de uma estrutura são chamados de elementos estruturais e são classificados em elementos lineares, bidimensionais e tridimensionais.

5.2 Problematizando o tema

Normalmente, estuda-se apenas o elemento linear denominado barra, em que uma das dimensões é bem maior que as outras duas:

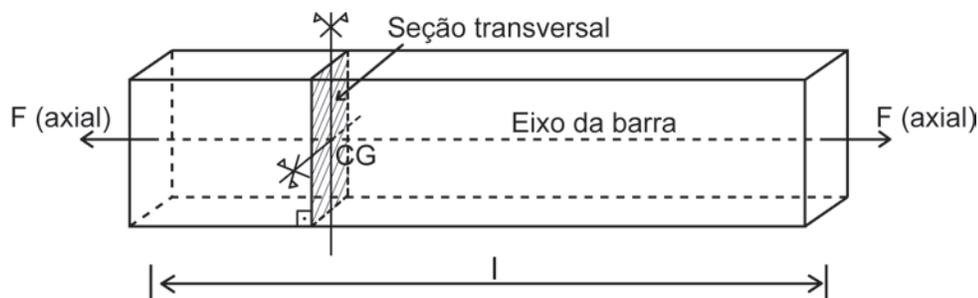


Figura 5.1 Barra e suas características.

A seção transversal é definida por um corte perpendicular à direção longitudinal. Nas seções transversais duplamente simétricas, o CG encontra-se na interseção dos dois eixos de simetria. A trajetória do CG das infinitas seções transversais ao longo do comprimento da barra define o seu eixo, que pode ser reto ou curvo. A barra prismática apresenta eixo reto e seção transversal constante. A força longitudinal F é axial quando atua no eixo da barra.

5.3 Tensão

Um corte imaginário passando por um plano inclinado divide a barra em duas partes. O equilíbrio das partes separadas é garantido por meio da tensão total:

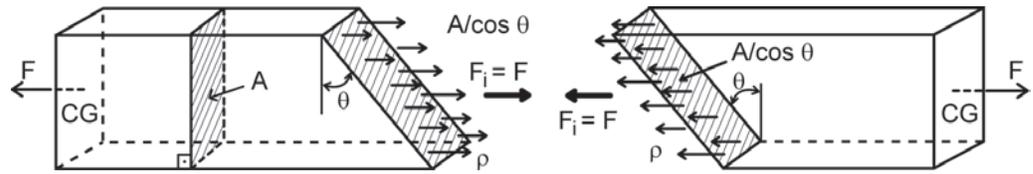


Figura 5.2 Tensão total nos pontos da seção de corte.

$$\text{tensão total} = \frac{\text{força interna}}{\text{área em que atua}} \quad \rho = \frac{F}{A/\cos \theta}$$

Tensão total e suas componentes:

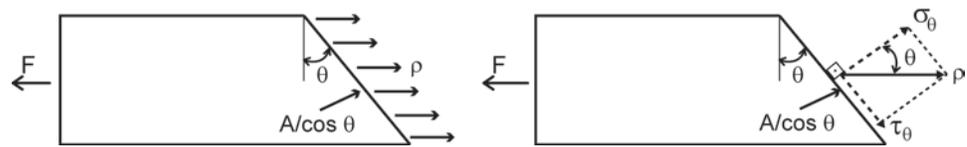


Figura 5.3 Parte à esquerda da seção de corte.

$$\sigma_{\theta} = \rho \cdot \cos \theta = \frac{F}{A/\cos \theta} \cdot \cos \theta = \frac{F}{A} \cdot \cos^2 \theta \quad (\text{tensão normal})$$

$$\tau_{\theta} = \rho \cdot \sin \theta = \frac{F}{A/\cos \theta} \cdot \sin \theta = \frac{F}{A} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \quad (\text{tensão de cisalhamento})$$

5.4 Deformação

Um corpo se deforma quando a distância entre dois pontos diferentes varia:

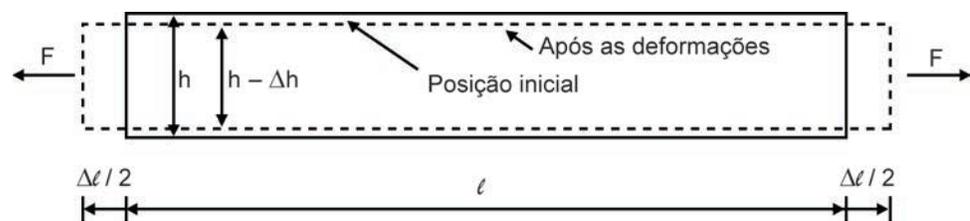


Figura 5.4 Deformações longitudinal e transversal.

$$\text{Deformação específica longitudinal: } \varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell};$$

$$\text{Deformação específica transversal: } \varepsilon_t = \frac{\Delta h}{h};$$

$$\text{Coeficiente de Poisson: } \nu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}.$$

5.5 Material

Os materiais podem ser classificados segundo diferentes critérios, relacionados com suas diversas propriedades. A seguir, descrevem-se algumas das principais características que um material pode apresentar:

- Homogêneo: tem as mesmas propriedades para todos os pontos;
- Isotrópico: tem as mesmas propriedades em todas as direções para um ponto;
- Elástico: o corpo recupera as deformações ao se retirarem as solicitações;
- Elástico-linear: há uma relação linear entre tensão e deformação;
- Dúctil: a ruptura ocorre com grandes deformações;
- Frágil: a ruptura ocorre com pequenas deformações.

5.6 Segurança da estrutura

Há diferentes formas de estabelecer ou garantir a segurança de uma estrutura. Por exemplo: contra a ruptura do material pode-se empregar o método das tensões admissíveis:

Tensão atuante \leq tensão admissível;

Tensão admissível = tensão de ruptura/coeficiente de segurança.

Além disso, normalmente é necessário garantir a segurança relativa à deformação, obtida evitando-se as deformações excessivas.

5.7 Considerações finais

As grandezas tensão e deformação são muito importantes para avaliar a segurança de uma estrutura. Por meio de uma barra solicitada axialmente, são definidas a tensão total e suas componentes (normal e de cisalhamento) e as deformações específicas (longitudinal e transversal). Além disso, algumas propriedades dos materiais são fundamentais.

UNIDADE 6

Esforços solicitantes em estruturas planas
isostáticas

6.1 Primeiras palavras

Um corpo rígido no plano xy pode ter dois movimentos de translação, direção longitudinal e transversal – x e y –, e um movimento de rotação, relativo ao eixo z .

Teoricamente, um corpo rígido não se deforma quando solicitado, ou seja, a posição relativa dos diferentes pontos não varia. Para a verificação do equilíbrio, ou seja, para o cálculo das reações nos apoios que o mantêm parado, essa aproximação não altera os resultados. Relembrando, a vinculação do corpo impede os movimentos de corpo rígido aplicando forças e momentos reativos.

Na verdade, o corpo não é totalmente rígido e se deforma quando solicitado. Internamente, surgem tensões e deformações que variam em cada seção, decorrentes dos esforços solicitantes.

Esforços solicitantes são esforços internos que resultam das tensões que atuam numa dada seção. No contexto deste livro, eles são classificados em força normal, força cortante e momento fletor. Pela Lei de Hooke, a tensão é proporcional à deformação.

6.2 Problematizando o tema

Imagine uma barra no plano xy vinculada nas suas extremidades, com um apoio fixo e um móvel, submetida a um carregamento uniformemente distribuído em sua extensão, em equilíbrio. Ao seccioná-la num ponto qualquer e separá-la em duas partes, obtém-se a seção s . Faz-se o DCL de uma parte – a da esquerda, por exemplo – e nela aplica-se as equações de equilíbrio. No DCL se representam todas as forças: as ativas anteriormente aplicadas (o carregamento uniforme que atua nessa parte) e as reativas (reação no apoio da extremidade esquerda).

Falta colocar no DCL a ação da parte da direita, que atua na seção em que a barra foi separada. Estabelecendo as equações de equilíbrio, percebe-se que elas só poderão ser satisfeitas se surgirem, nessa seção, forças nas direções x e y e momento em torno de z . Estes são os esforços solicitantes na seção s .

6.3 Esforços solicitantes

Considere uma barra em equilíbrio, com os esforços ativos e reativos atuando no mesmo plano a fim de que não ocorra torção, conforme Figura 6.1. É usual representar a barra da Figura 6.1 por meio do seu eixo, como indicado na Figura 6.2:

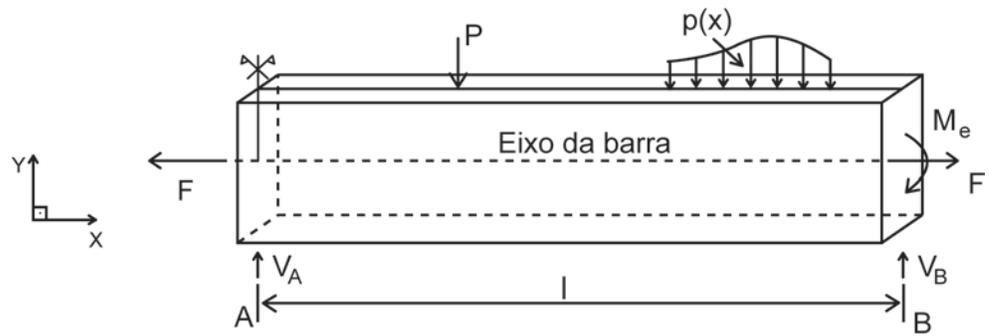


Figura 6.1 Barra em equilíbrio.

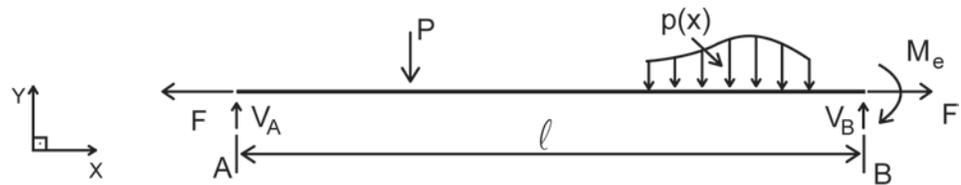


Figura 6.2 Barra em equilíbrio.

Um corte imaginário na seção s divide a barra em duas partes. Os esforços solicitantes internos (N , V , M) resultam das tensões que atuam na seção s , que surgem em decorrência das ações no corpo, necessárias para a garantia do equilíbrio. Eles podem ser determinados equilibrando-se uma das partes separadas pelo corte imaginário, como se mostra na Figura 6.3. Considera-se um novo corte toda vez que surgir um novo esforço, ativo ou reativo:

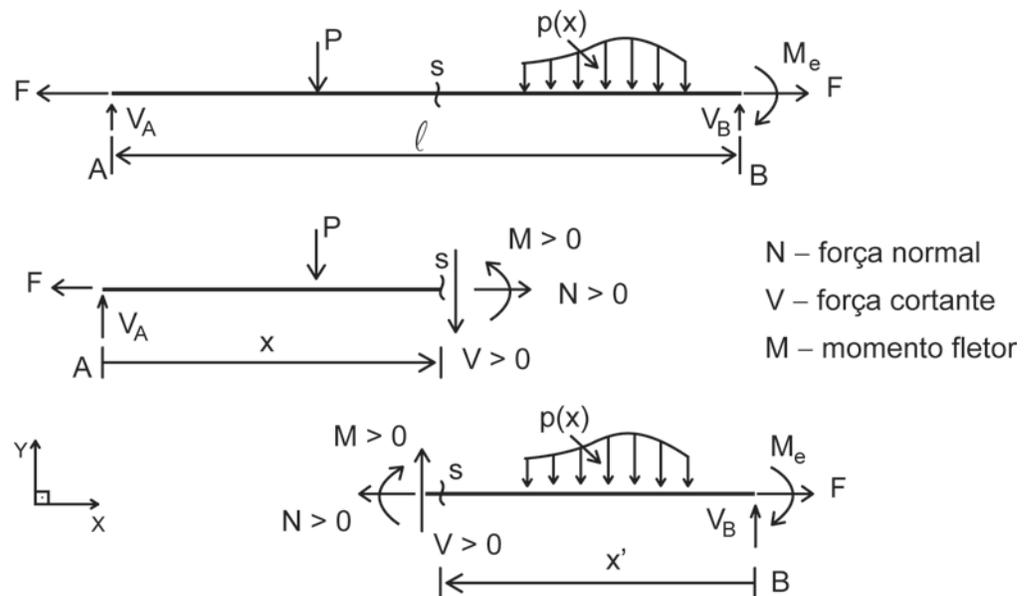


Figura 6.3 Esforços solicitantes na seção do corte imaginário.

6.3.1 Convenções de sinais

$N > 0$ traciona a parte considerada;

$V > 0$ gira a parte considerada no sentido horário;

$M > 0$ traciona a parte inferior.

6.4 Classificação da estrutura

- Hipostática: número de reações de vínculos inferior ao número de equações de equilíbrio:

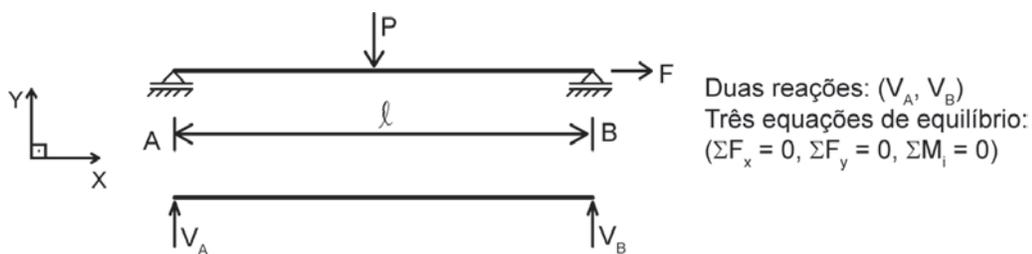


Figura 6.4 Estrutura hipostática.

- Isostática: número de reações de vínculos igual ao número de equações de equilíbrio:

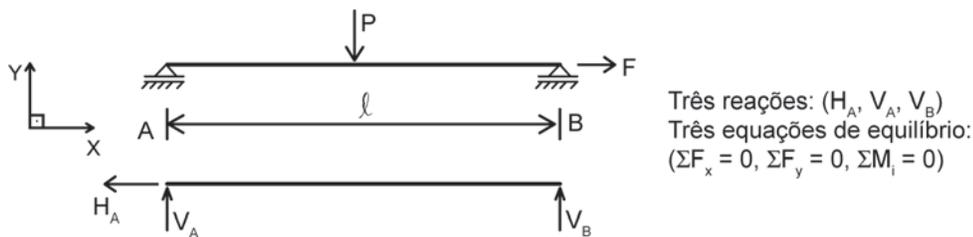


Figura 6.5 Estrutura isostática.

- Hiperestática: número de reações de vínculos superior ao número de equações de equilíbrio:

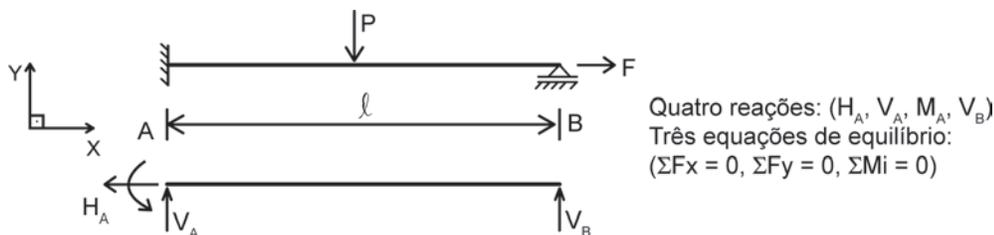


Figura 6.6 Estrutura uma vez hiperestática.

Neste texto, apenas as estruturas isostáticas são consideradas.

6.5 Relações entre momento fletor M, força cortante V e carga distribuída p

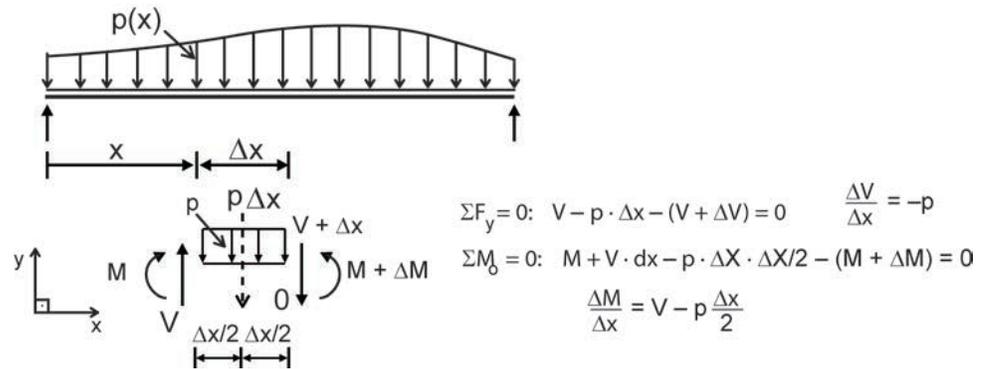


Figura 6.7 Equilíbrio de um trecho da barra.

Levando ao limite com Δx tendendo a zero:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \cong \frac{dV}{dx} = -p \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} \cong \frac{dM}{dx} = V$$

Integrando:

$$V = -p \cdot x + c_1 \quad \text{e} \quad M = V \cdot x + c_2 = (-px + c_1) \cdot x + c_2 = -px^2 + c_1 \cdot x + c_2$$

Por meio dessas equações, é possível saber a forma dos diagramas de V e M nos trechos em que a função $p(x)$ for contínua.

Carga concentrada, $p = 0$:

$$V = -0 \cdot x + c_1 \text{ constante;}$$

$$M = -0 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_2 \text{ reta.}$$

Carga uniformemente distribuída, $p = p_0$:

$$V = -p_0 \cdot x + c_1 \text{ reta;}$$

$$M = -p_0 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_2 \text{ parábola.}$$

Das relações entre $V = \frac{dM}{dx}$ e $\frac{dV}{dx} = -p$ resulta:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dM}{dx} \right) = \frac{d^2M}{dx^2} = -p < 0$$

Assim, ao anular a força cortante V , o momento fletor M é máximo.

Problema 6.1 Trace os diagramas dos esforços solicitantes determinando as respectivas equações e os devidos valores numéricos. A força longitudinal é axial:

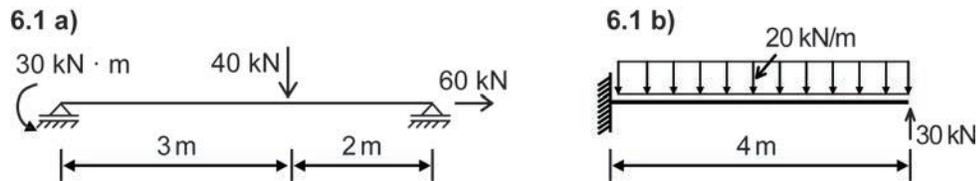


Figura 6.8 Carregamento das barras biapoia e engastada.

Solução:

a) cálculo das reações:

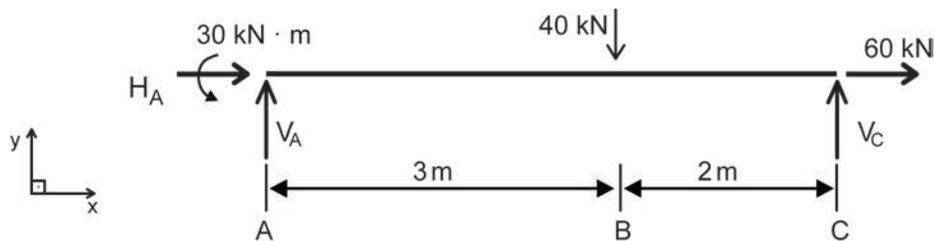


Figura 6.9 Esforços ativos e reativos.

Equações de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0: H_A + 60 = 0 \quad (1); \text{ e } \sum F_y = 0: V_A + V_C - 40 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0: V_C \cdot 5 - 40 \cdot 3 + 30 = 0 \quad (3)$$

De (1), (2) e (3): $H_A = -60 \text{ kN}$; $V_A = 22 \text{ kN}$; $V_C = 18 \text{ kN}$.

O sinal negativo de H_A indica que o sentido inicialmente adotado deve ser invertido:

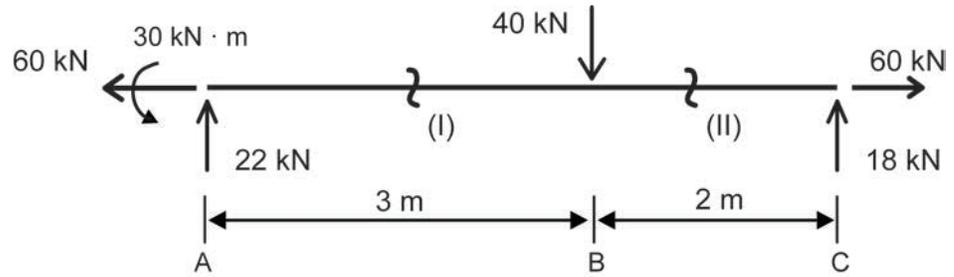


Figura 6.10 Barra em equilíbrio.

Esforços solicitantes: são determinados equilibrando uma das partes separadas por cortes imaginários ao longo da barra. Um novo corte é necessário toda vez que as equações forem modificadas, ou seja, toda vez que surgir um novo esforço, ativo ou reativo. No caso, são necessários dois cortes:

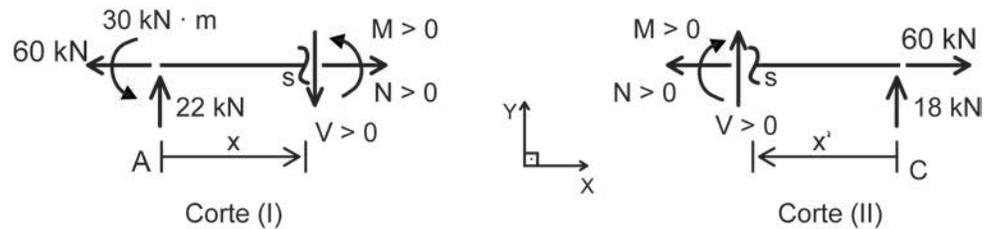


Figura 6.11 Esforços dos cortes imaginários na barra em equilíbrio.

Equações de equilíbrio do corte (I), válidas no intervalo: $0 \leq x \leq 3$ m:

$$\sum F_x = 0: N - 60 = 0 \quad N = 60 \text{ kN} \quad \text{constante}$$

$$\sum F_y = 0: V - 22 = 0 \quad V = 22 \text{ kN} \quad \text{constante}$$

$$\sum M_s = 0: M - 22 \cdot x + 30 = 0 \quad M = 22 \cdot x - 30 \text{ kN} \quad \text{linear}$$

$$x = 0: M = 220 - 30 = -30 \text{ kN} \cdot \text{m}; \quad x = 3 \text{ m}: M = 22 \cdot 3 - 30 = 36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Equações de equilíbrio do corte (II), válidas no intervalo: $0 \leq x' \leq 2$ m:

$$\sum F_x = 0: N - 60 = 0 \quad N = 60 \text{ kN} \quad \text{constante}$$

$$\sum F_y = 0: V - 18 = 0 \quad V = 18 \text{ kN} \quad \text{constante}$$

$$\sum M_s = 0: M - 18 \cdot x' = 0 \quad M = 18 \cdot x' \quad \text{linear}$$

$$x' = 0: M = 18 \cdot 0 = 0 \quad x' = 2 \text{ m}: M = 18 \cdot 2 = 36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

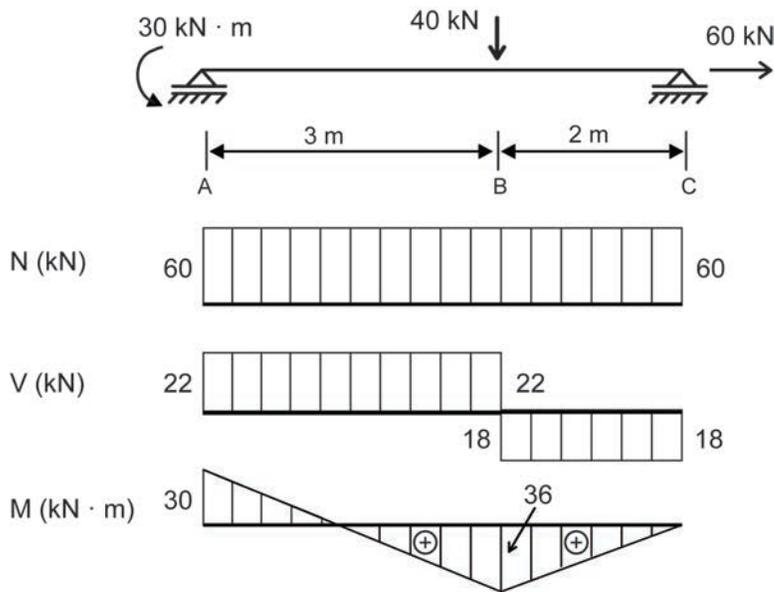


Figura 6.12 Diagramas dos esforços solicitantes.

O momento fletor de $-30 \text{ kN}\cdot\text{m}$ na seção A é consequência do momento externo aplicado. Aproximando da seção B pela esquerda, valem as equações do corte (I), e, pela direita, as equações do corte (II). Há descontinuidade da força cortante: $v_{\text{Besq}} = 22 \text{ kN}$, $v_{\text{Bdir}} = -18 \text{ kN}$, cuja soma $v_{\text{Besq}} + |v_{\text{Bdir}}| = 40 \text{ kN}$ resulta na carga transversal aplicada. O momento fletor $M_{\text{Bdir}} = 36 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ($x' = 2 \text{ m}$) é igual a $M_{\text{Besq}} = 36 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ($x = 3 \text{ m}$), pois não há momento externo aplicado na seção B.

Solução:

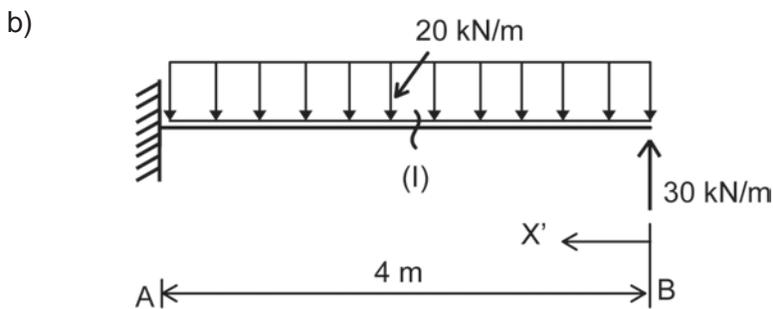


Figura 6.13 Barra engastada e isostática.

Esforços solicitantes: nas barras engastadas e isostáticas, é possível dispensar o cálculo das reações adotando a coordenada x' da extremidade livre para o engastamento fixo. Apenas o corte (I) é suficiente, e a força normal N não precisa ser considerada, pois não há forças longitudinais:

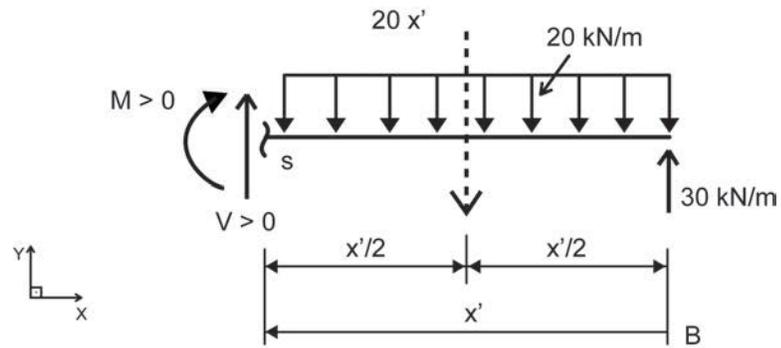


Figura 6.14 Esforços do corte (I).

Equações de equilíbrio válidas no intervalo $0 \leq x' \leq 4$ m:

$$\sum F_y = 0: V - 20 \cdot x' + 30 = 0 \quad V = 20 \cdot x' - 30 \quad \text{linear}$$

$$\sum M_s = 0: M + 20 \cdot x' \cdot x'/2 - 30 \cdot x' = 0 \quad M = -(10 \cdot x')^2 + 30 \cdot x' \quad \text{parábola}$$

$$x' = 0: V = 20 \cdot 0 - 30 = -30 \text{ kN} \quad M = -10 \cdot (0)^2 + 300 = 0;$$

$$x' = 4 \text{ m}: V = 20 \cdot 4 - 30 = 50 \text{ kN} \quad M = -10 \cdot (4)^2 + 304 = -40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Para o momento fletor, como o diagrama é parabólico, deve-se determinar um terceiro ponto da curva. Inicialmente, procura-se o terceiro valor de x' anulando-se o valor da força cortante (que é negativa, $V = -dM/dx'$, pelo fato de x' ter sentido contrário ao x adotado na dedução das relações p , V , M). Caso esse equacionamento resulte em valores de x' fora do intervalo $[0; 4]$, ou $x' = 0$ ou $x' = 4$ (valores extremos, já utilizados), adota-se arbitrariamente um valor de x' no intervalo $0 < x' < 4$ m.

$$V = 20 \cdot x' - 30 = 0 \quad x' = 1,5 \text{ m pertence ao intervalo do corte (I).}$$

$$\text{Logo, } M = -10 \cdot (1,5)^2 + 30 \cdot 1,5 = 22,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

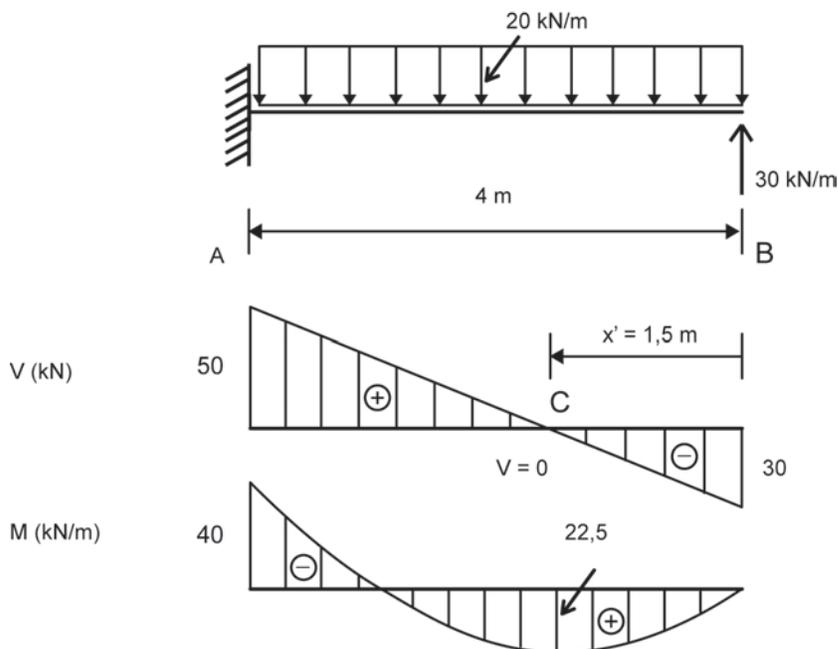


Figura 6.15 Diagramas dos esforços solicitantes.

Exercício proposto 6.1 Trace os diagramas dos esforços solicitantes determinando as respectivas equações e os devidos valores numéricos. A força longitudinal é axial:

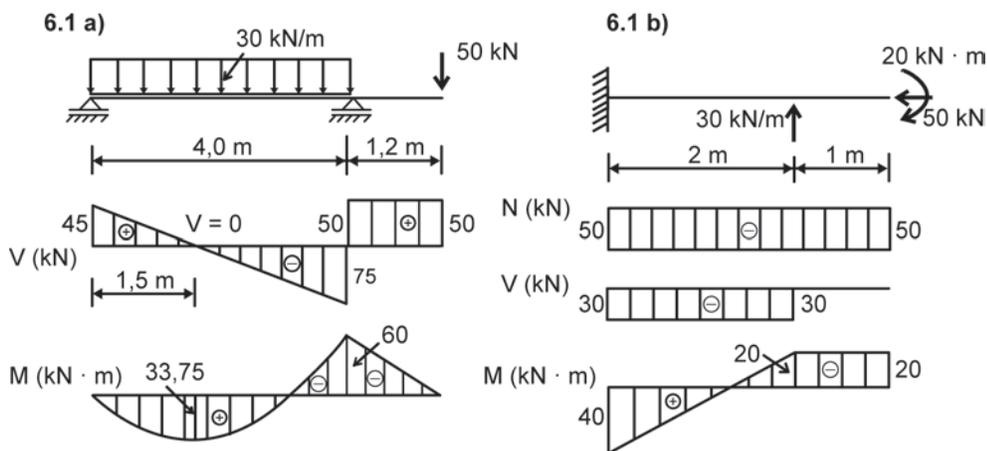


Figura 6.16 Carregamento das barras biapoiada e engastada.

6.6 Considerações finais

Um corte imaginário separa a barra em duas partes. Ao considerar uma das partes separadas, tem-se que: a força normal N equilibra a resultante longitudinal, a força cortante V equilibra a resultante transversal, e o momento fletor M equilibra o momento resultante. Um novo corte é necessário ao surgir um novo esforço aplicado, e os diagramas dos esforços solicitantes (N , V , M) são traçados respeitando as convenções de sinais adotadas.

UNIDADE 7

Barras submetidas à força normal

7.1 Primeiras palavras

Nesta unidade, serão estudados os casos de barras prismáticas submetidas apenas a forças axiais, que provocam esforço solicitante normal de tração ou compressão. Aprender-se-á a calcular a tensão que surge em decorrência desse esforço e os deslocamentos na barra. Além disso, será introduzida a análise da segurança da barra solicitada, especialmente contra a ruptura.

7.2 Problematizando o tema

Para uma barra com força normal, supõe-se que a tensão tenha distribuição uniforme na área da seção, igual à força normal dividida pela área.

Sempre que está sob tensão, um corpo se deforma. A Lei de Hooke estabelece uma relação linear entre tensão e deformação, que depende apenas do módulo de elasticidade do material. Como visto anteriormente, o modo como o material se deforma depende de sua natureza – frágil, dúctil etc. Assim, genericamente, a Lei de Hooke só é válida no regime elástico. Forças axiais provocam deslocamentos axiais: alongamento para tração e encurtamento para compressão, calculados pela Lei de Hooke.

Tente segurar uma régua de plástico nas extremidades e esticá-la. Você provavelmente não perceberá que ela se alonga, pois o valor desse alongamento é muito pequeno. Faça o mesmo com um fio de cabelo. Você perceberá nitidamente o alongamento.

O que diferencia esses dois casos? Há duas diferenças importantes: a tensão aplicada e o tipo do material, módulo de elasticidade. Para o fio de cabelo, a tensão aplicada é muito maior, já que a área da seção transversal é muito menor. Além disso, os materiais têm módulos de elasticidade distintos.

Outro aspecto importante que será tratado nesta unidade: para a régua, muito provavelmente você não conseguirá quebrá-la, desde que mantenha a direção da força axial. O fio de cabelo, por sua vez, rompe facilmente. Isso ocorre porque, no primeiro caso, você não ultrapassou a tensão limite de resistência do material.

7.3 Tensões e deslocamentos longitudinais

São deduzidas as equações da tensão normal e do deslocamento longitudinal considerando apenas a influência da força normal.

7.3.1 Tensão normal

Uma barra solicitada por forças axiais F aplicadas nas extremidades pode ser tracionada ou comprimida:

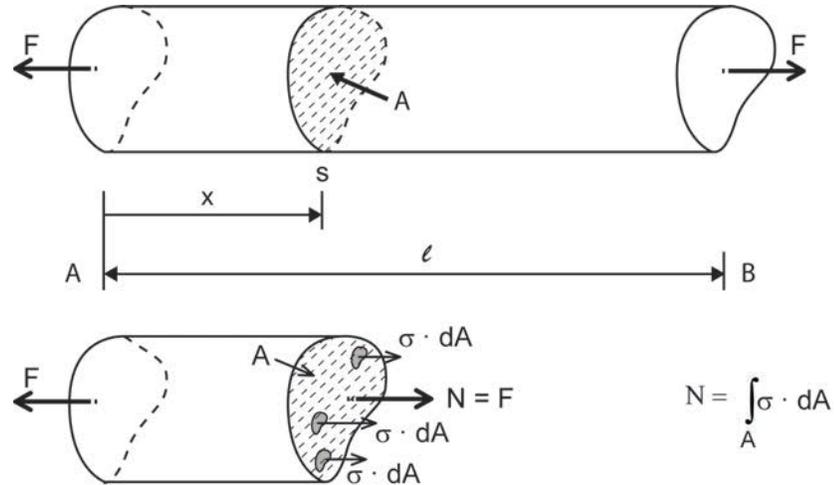


Figura 7.1 Barra tracionada.

Invertendo o sentido da força F , a barra é comprimida. Nesse caso, são consideradas apenas as barras curtas em que não ocorre o fenômeno da flambagem, que é uma perda de estabilidade lateral.

Admitindo que todos os pontos da seção transversal sejam tracionados por uma tensão normal σ de mesma intensidade, a integral das forças $\sigma \cdot dA$ na área A é igual à força normal N , que, por equilíbrio, é igual a F . Nas barras comprimidas: $N = -F$. Nos trechos com N e A constantes, a tensão normal é determinada por meio de: $\sigma = N/A$.

7.3.2 Diagramas tensão x deformação

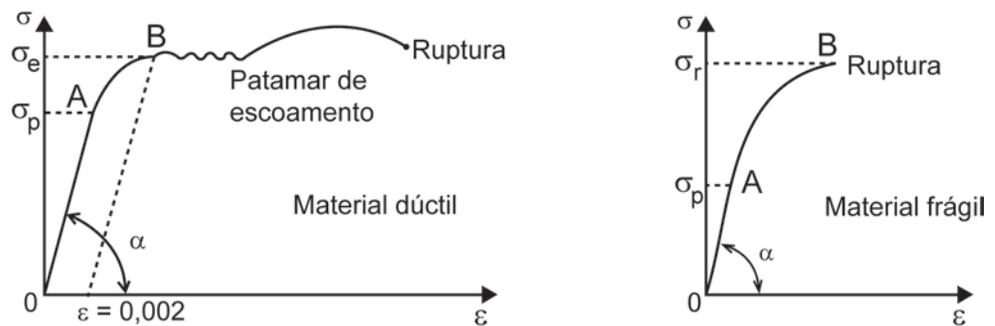


Figura 7.2 Diagramas tensão x deformação.

em que: σ_p = tensão de proporcionalidade que define o trecho linear; σ_e = tensão de escoamento, determinada por uma reta paralela ao trecho linear a partir da deformação convencional $\varepsilon = 0,002$; e σ_r = tensão de ruptura.

O patamar de escoamento ocorre quando o corpo se deforma sem praticamente ser alterado o nível de tensão.

No trecho reto do diagrama $\sigma \cdot \varepsilon$, o material está no regime elástico linear e vale a Lei de Hooke: $\sigma = E \cdot \varepsilon$, sendo $E = \text{tg}\alpha$ módulo de deformação longitudinal ou módulo de elasticidade do material.

7.3.3 Deslocamento longitudinal

Admite-se que seções planas permanecem planas após as deformações:

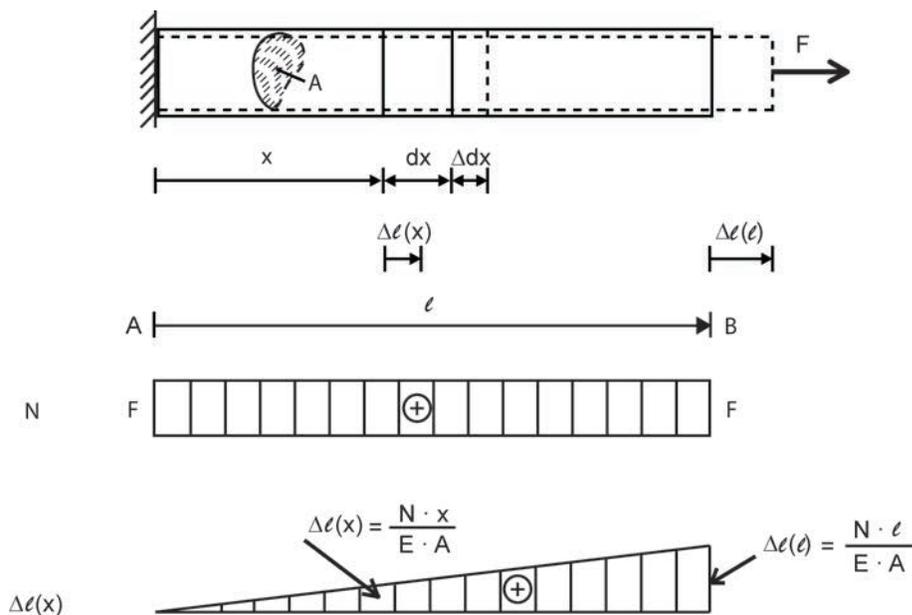


Figura 7.3 Deslocamento longitudinal de uma barra tracionada.

Tensão normal: $\sigma = N/A$.

Deformação específica longitudinal do trecho de comprimento dx :

$$\varepsilon = \Delta dx/dx.$$

Lei de Hooke: $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Portanto, $\frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta dx}{dx}$; $\Delta dx = \frac{N}{E \cdot A} \cdot dx$.

$$\text{Integrando, } \int_0^{\Delta l(x)} \Delta dx = \int_0^x \frac{N}{E \cdot A} \cdot dx.$$

$$\text{Em trechos com } (N, E, A) \text{ constantes: } \Delta l(x) = \frac{N \cdot x}{E \cdot A}.$$

A equação do deslocamento longitudinal é linear. Logo:

$$x = 0; \Delta l(0) = \frac{N \cdot 0}{E \cdot A} \text{ e } x = l; \Delta l(l) = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = 0$$

Existindo mais de um trecho com (N, E, A) constantes, é conveniente utilizar a seguinte notação:

$$\Delta l_{AB} = \Delta l(l) = \frac{N \cdot x}{E \cdot A},$$

que é o deslocamento longitudinal dos pontos da seção B em relação à seção A, sendo l o comprimento do trecho AB.

Problema 7.1 Determine os valores máximos da tensão normal e do deslocamento longitudinal sabendo que apenas o efeito das forças longitudinais, que são axiais, deve ser considerado. Dado: módulo de deformação longitudinal $E = 15000 \text{ kN/cm}^2$:

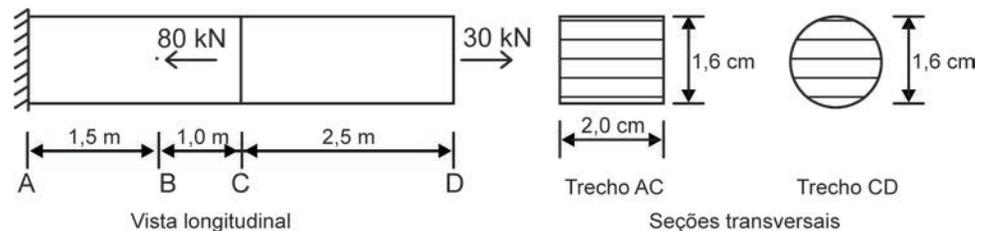


Figura 7.4 Barra engastada e isostática.

Esforços solicitantes:

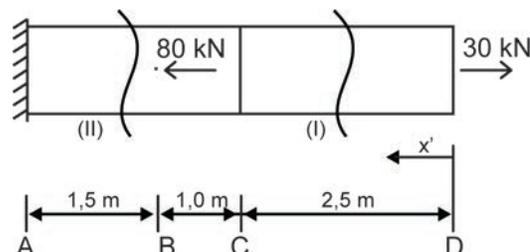


Figura 7.5 Cortes imaginários e coordenada x' .

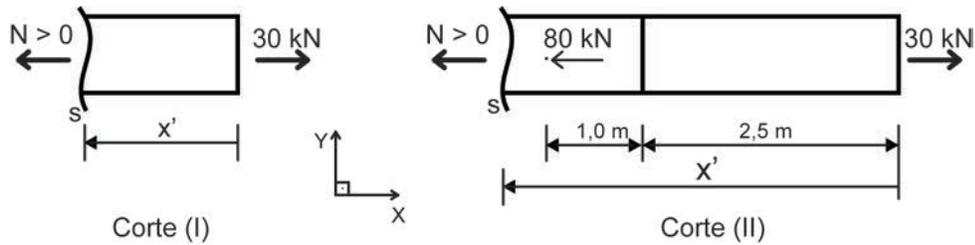


Figura 7.6 Esforços dos cortes imaginários na barra em equilíbrio.

Equação de equilíbrio dos cortes (I) e (II):

$$\sum F_x = 0: N - 30 = 0; N = 30 \text{ kN, válida no intervalo } 0 \leq x' \leq 3,5 \text{ m;}$$

$$\sum F_x = 0: N - 30 + 80 = 0; N = -50 \text{ kN, válida no intervalo } 3,5 \text{ m} \leq x' \leq 5,0 \text{ m.}$$

Tensão normal e deslocamento longitudinal:

$$\sigma = \frac{N}{A} \text{ e } \Delta l(x) = \frac{N \cdot x}{E \cdot A},$$

equações válidas nos trechos em que (N, E, A) são constantes.

A força normal N muda na seção B, a área da seção transversal A muda na seção C, e o mesmo módulo de deformação transversal E do material é constante em toda a barra. Portanto, são necessários três trechos com (N, E, A) constantes:

$$\text{Trecho AB: } A = 2,0 \cdot 1,6 = 3,2 \text{ cm}^2$$

$$\sigma = \frac{-50}{3,2} = -15,62 \text{ kN/cm}^2 \quad \Delta l_{AB} = \frac{(-50) \cdot 150}{15000 \cdot 3,2} = -1,562 \cdot 10^{-1} \text{ cm}$$

$$\text{Trecho BC: } A = 2,0 \cdot 1,6 = 3,2 \text{ cm}^2$$

$$\sigma = \frac{30}{3,2} = 9,38 \text{ kN/cm}^2 \quad \Delta l_{BC} = \frac{30 \cdot 100}{15000 \cdot 3,2} = 6,250 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

$$\text{Trecho CD: } A = (\pi \cdot 1,6^2) / 4 = 2,01 \text{ cm}^2$$

$$\sigma = \frac{30}{2,01} = 14,92 \text{ kN/cm}^2 \quad \Delta l_{CD} = \frac{30 \cdot 250}{15000 \cdot 2,01} = 2,488 \cdot 10^{-1} \text{ cm}$$

Os pontos de todas as seções ao longo do comprimento da barra se deslocam em relação ao engastamento fixo da seção A. No regime elástico, é possível a seguinte superposição de efeitos:

$$\Delta l_{AC} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = -1,562 \cdot 10^{-1} + 6,250 \cdot 10^{-2} = -9,370 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

$$\Delta l_{AD} = \Delta l_{AC} + \Delta l_{CD} = -9,370 \cdot 10^{-2} + 2,488 \cdot 10^{-1} = 1,550 \cdot 10^{-1} \text{ cm}$$

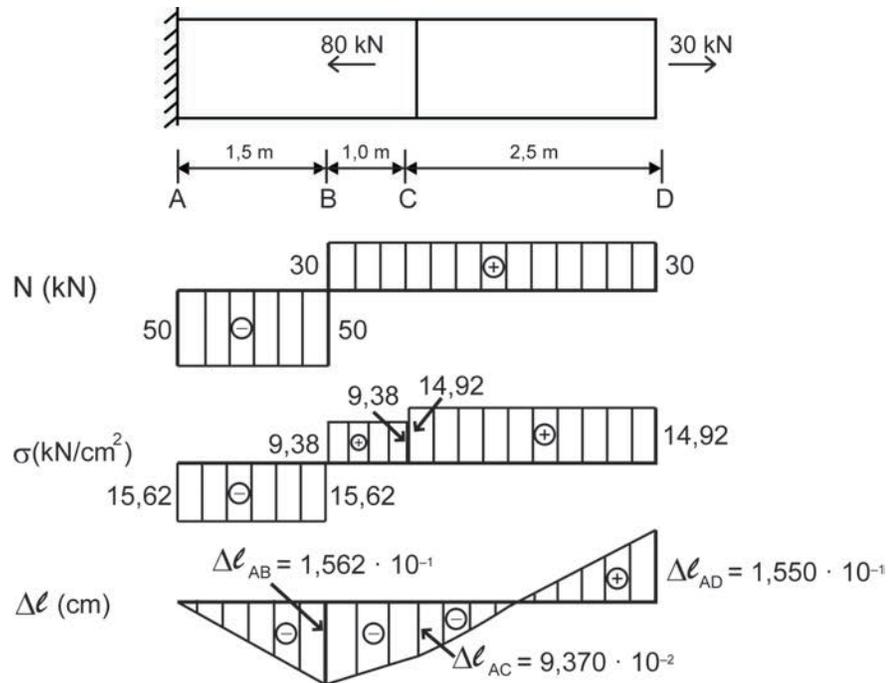


Figura 7.7 Diagramas: força normal, tensão normal e deslocamento longitudinal.

A máxima tensão normal é a de maior valor em módulo entre os trechos AB, BC e CD. Logo, $\sigma_{m\acute{a}x} = 15,62 \text{ kN/cm}^2$.

Conforme o princípio de Saint Venant, nas proximidades das seções com descontinuidade de esforço ou de seção transversal, há concentração de tensão e não valem os valores calculados por meio da equação $\sigma = N/A$.

O deslocamento longitudinal máximo é o de maior valor em módulo entre $(\Delta l_{AB}, \Delta l_{AC}, \Delta l_{AD})$. Logo, $\Delta l_{m\acute{a}x} = 1,562 \cdot 10^{-1} \text{ cm}$.

Problema 7.2 Determine os valores da força F sabendo que os valores das tensões normais admissíveis não devem ser ultrapassados. Considere apenas o efeito das forças longitudinais, que são axiais. Dados: tensão normal de tração admissível $\sigma_{t,adm} = 100 \text{ MPa}$; e tensão normal de compressão admissível $\sigma_{c,adm} = 400 \text{ MPa}$:

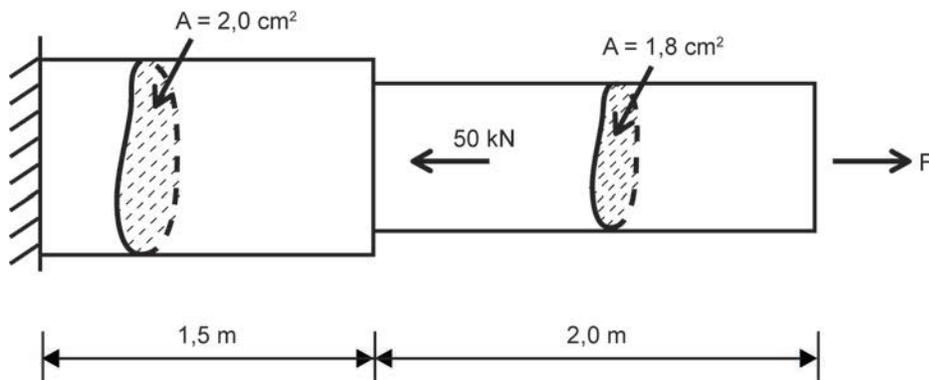


Figura 7.8 Barra engastada e isostática.

Esforços solicitantes:

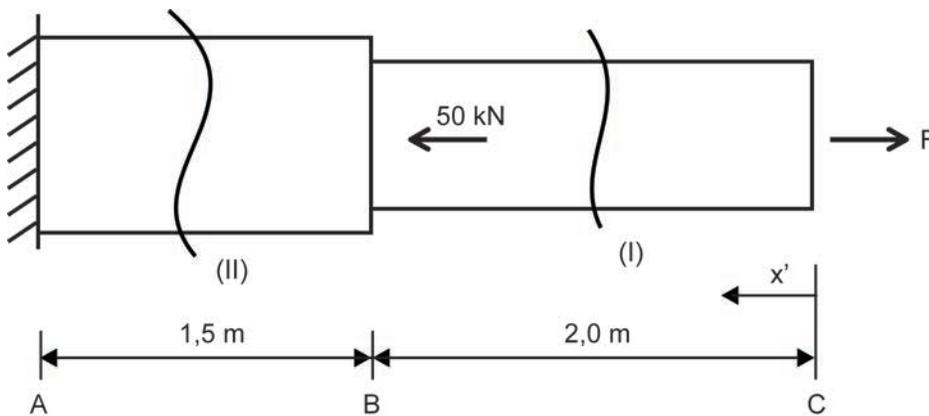


Figura 7.9 Cortes imaginários e coordenada x' .

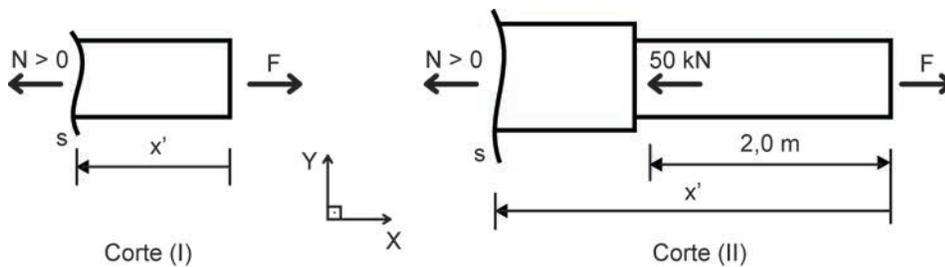


Figura 7.10 Esforços dos cortes imaginários na barra em equilíbrio.

Equação de equilíbrio dos cortes (I) e (II):

$$\sum F_x = 0: N - F = 0$$

$N = F$, válida no intervalo: $0 \leq x' \leq 2,0 \text{ m}$;

$$\sum F_x = 0: N - F + 50 = 0$$

$N = F - 50$, válida no intervalo: $2 \text{ m} \leq x' \leq 3,5 \text{ m}$.

Valores da força F : manter o sentido de F indicado na figura significa admitir ($F > 0$), e, caso contrário, ($F < 0$).

A tensão atuante não deve ultrapassar a tensão admissível. Pontos de uma determinada seção transversal podem ser tracionados ($\sigma > 0$) ou comprimidos ($\sigma < 0$), sendo possível levar em conta essas duas situações utilizando a função modular:

$$\text{Trecho AB: } |\sigma| = \left| \frac{F - 50}{2,0} \right| = |0,5 \cdot F - 25| \leq \sigma_{\text{adm}}$$

Ponto tracionado ($\sigma > 0$):

$$+\sigma \leq \sigma_{\text{t,adm}} = 100 \text{ MPa} = 10 \text{ kN/cm}^2 \quad +(0,5 \cdot F - 25) \leq 10 \quad F \leq 70 \text{ kN};$$

Ponto comprimido ($\sigma < 0$):

$$-\sigma \leq \sigma_{\text{c,adm}} = 400 \text{ MPa} = 40 \text{ kN/cm}^2 \quad -(0,5 \cdot F - 25) \leq 40 \quad F \geq -30 \text{ kN}.$$

$$\text{Trecho BC: } |\sigma| = \left| \frac{F}{1,8} \right| = |0,5556 \cdot F| \leq \sigma_{\text{adm}}$$

Ponto tracionado ($\sigma > 0$):

$$+\sigma \leq \sigma_{\text{t,adm}} = 100 \text{ MPa} = 10 \text{ kN/cm}^2 \quad +(0,5556 \cdot F) \leq 10 \quad F \leq 18 \text{ kN};$$

Ponto comprimido ($\sigma < 0$):

$$-\sigma \leq \sigma_{\text{c,adm}} = 400 \text{ MPa} = 40 \text{ kN/cm}^2 \quad -(0,5556 \cdot F) \leq 40 \quad F \geq -72 \text{ kN}.$$

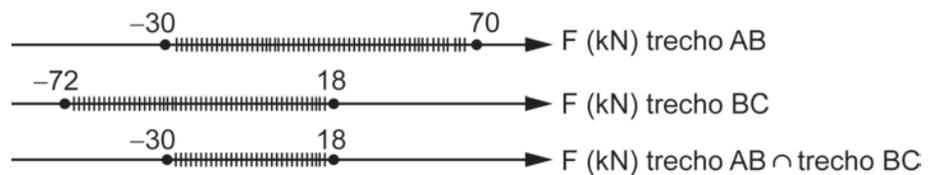


Figura 7.11 Valores da força F .

As tensões admissíveis não devem ser ultrapassadas nos trechos AB e BC. Da interseção dos valores de F nos dois trechos, resulta: $-30 \text{ kN} \leq F \leq 18 \text{ kN}$.

Problema 7.3 Sem considerar o efeito do peso próprio das barras, determine o valor admissível da força P mantendo o sentido indicado na figura. Para esse valor, calcule o deslocamento vertical do ponto de aplicação da força. Dados: tensão normal de tração admissível $\sigma_{t,adm} = 180 \text{ MPa}$; tensão normal de compressão admissível $\sigma_{c,adm} = 450 \text{ MPa}$; módulo de deformação longitudinal $E = 15000 \text{ kN/cm}^2$; e área da seção transversal $A = 2,0 \text{ cm}^2$:

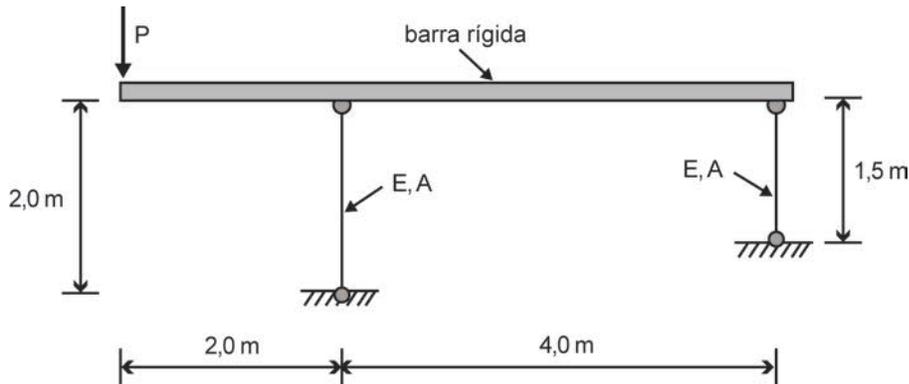


Figura 7.12 Estrutura composta de barra rígida e barras deformáveis.

Cálculo das forças nas barras deformáveis:

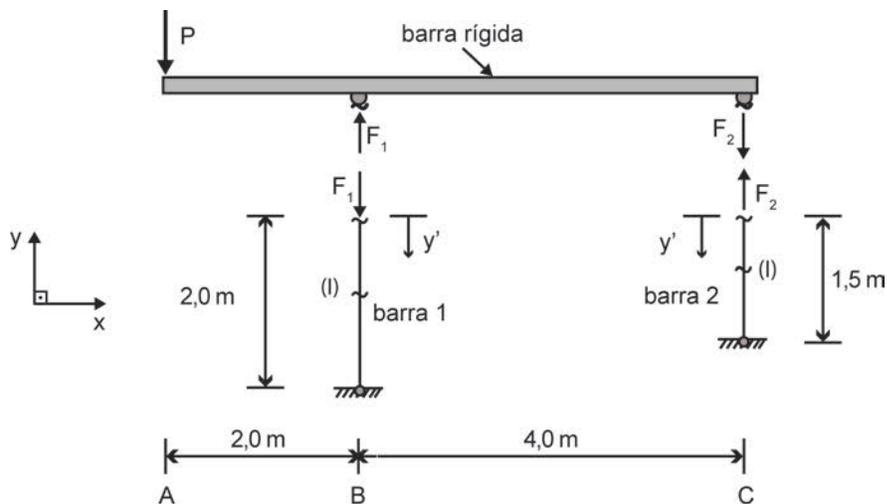


Figura 7.13 Cortes imaginários na interligação barra rígida e barras deformáveis.

Equações de equilíbrio – barra rígida:

$$\sum F_x = 0: F_1 - P - F_2 = 0 \quad (7.1)$$

$$\sum M_C = 0: F_1 \cdot 4 - P \cdot 6 = 0 \quad (7.2)$$

De (7.1) e (7.2): $F_1 = 1,5P$ e $F_2 = 0,5P$.

Esforço solicitante – força normal:

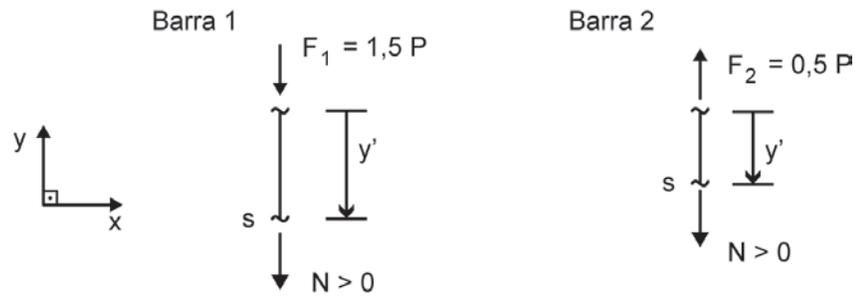


Figura 7.14 Esforços do corte imaginário nas barras deformáveis.

Equação de equilíbrio:

Barra 1: $\sum F_y = 0: N + F_1 = 0; N = -F_1 = -1,5 P$, válida no intervalo $0 \leq y' \leq 2,0 \text{ m}$

Barra 2: $\sum F_y = 0: N - F_2 = 0; N = F_2 = 0,5 P$, válida no intervalo $0 \leq y' \leq 1,5 \text{ m}$

Valores da força P : $P > 0$ para manter o sentido indicado na figura. A tensão atuante não deve ultrapassar a tensão admissível:

Barra 1 $|\sigma| = \left| \frac{1,5 \cdot P}{2,0} \right| = |-0,75 \cdot P| \leq \sigma_{adm} \quad P > 0$, logo σ :

$-\sigma \leq \sigma_{c,adm} = 450 \text{ MPa} = 45 \text{ kN/cm}^2 \quad -(-0,75 \cdot P) \leq 45 \quad F \leq 60 \text{ kN.}$

Barra 2 $|\sigma| = \left| \frac{0,5 \cdot P}{2,0} \right| = |0,25 \cdot P| \leq \sigma_{adm} \quad P > 0$, logo $\sigma < 0$:

$+\sigma \leq \sigma_{t,adm} = 180 \text{ MPa} = 18 \text{ kN/cm}^2 \quad (0,25 \cdot P) \leq 18 \quad F \leq 72 \text{ kN}$

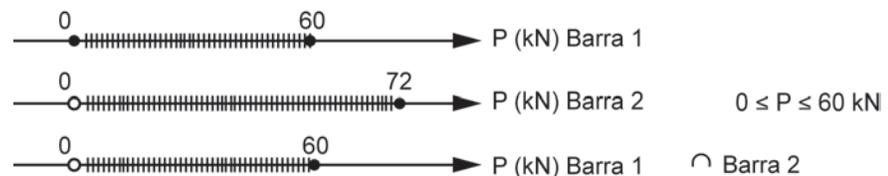


Figura 7.15 Valores da força P .

O valor admissível da força P é aquele que torna a tensão atuante igual à tensão admissível. Portanto, $P_{adm} = 60 \text{ kN}$.

Deslocamento vertical do ponto de aplicação da força P :

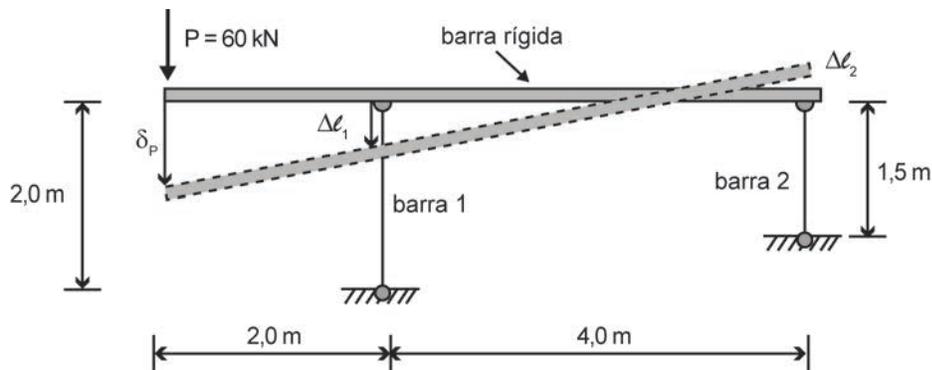


Figura 7.16 Movimento da barra rígida.

$$\text{Barra 1: } N = -1,5 \cdot 60 = -90 \text{ kN} \quad \Delta l_1 = \frac{(-90) \cdot 200}{15000 \cdot 2,0} = -0,60 \text{ cm (encurtamento)}$$

$$\text{Barra 2: } N = 0,5 \cdot 60 = 30 \text{ kN} \quad \Delta l_2 = \frac{30 \cdot 150}{15000 \cdot 2,0} = 0,15 \text{ cm (alongamento)}$$

Por semelhança de triângulos:

$$\frac{\delta_p + 0,15}{6} = \frac{0,60 + 0,15}{2} \quad \delta_p = 0,975 \text{ cm.}$$

Problema 7.4 Determine o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga desprezando o efeito do peso próprio das barras.

Dados: módulo de deformação longitudinal $E = 12.500 \text{ kN/cm}^2$; e área da seção transversal $A = 2,0 \text{ cm}^2$:

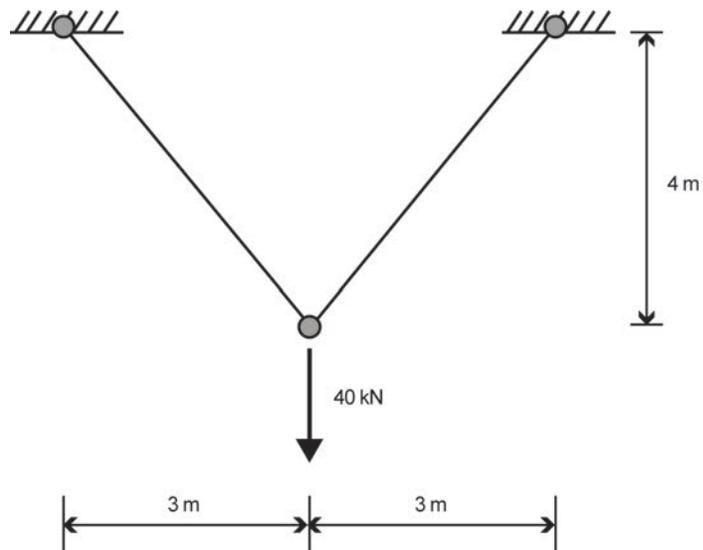


Figura 7.17 Barras deformáveis interligadas.

Cálculo das forças nas barras deformáveis

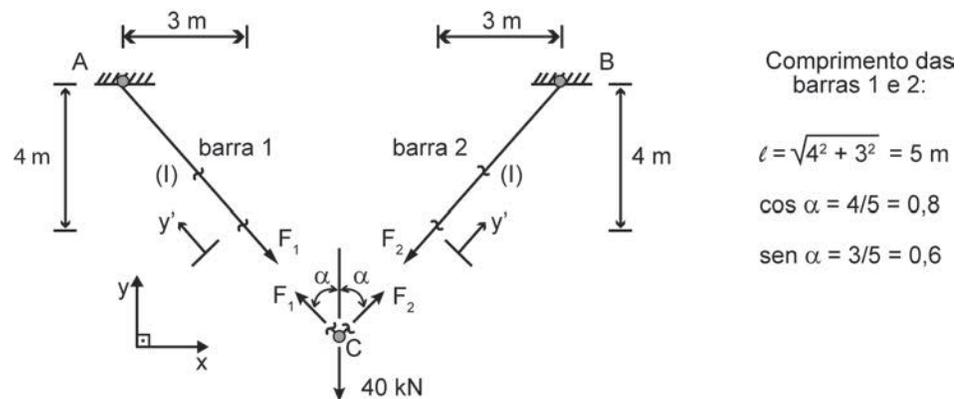


Figura 7.18 Cortes imaginários na interligação nó C e barras deformáveis.

Equações de equilíbrio (nó C):

$$\sum F_x = 0: F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (7.3)$$

$$\sum F_y = 0: F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot \cos \alpha - 40 = 0 \quad (7.4)$$

Das equações (7.3) e (7.4): $F_1 = F_2 = 25 \text{ kN}$.

Esforço solicitante – força normal:



Figura 7.19 Esforços do corte imaginário nas barras deformáveis.

Equação de equilíbrio:

Barra 1: $\sum F_{y'} = 0: N - F_1 = 0; N = F_1 = 25 \text{ kN}$, válida no intervalo $0 \leq y' \leq 5 \text{ m}$

Barra 2: $\sum F_{y'} = 0: N - F_2 = 0; N = F_2 = 25 \text{ kN}$, válida no intervalo $0 \leq y' \leq 5 \text{ m}$

Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga:

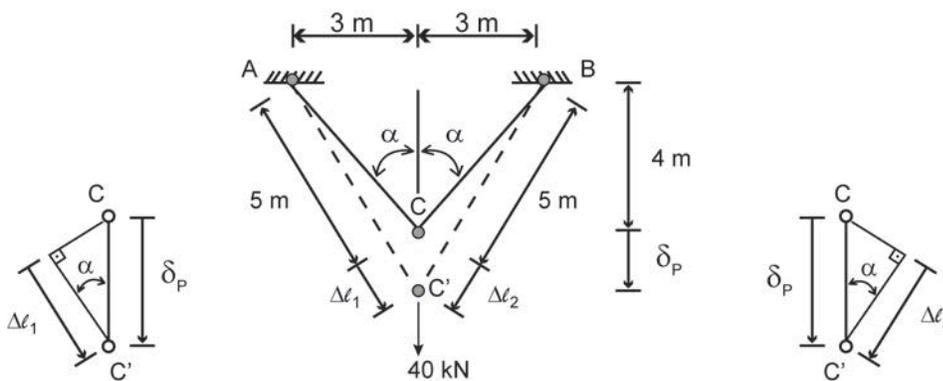


Figura 7.20 Movimento do nó C.

Admitindo pequenas deformações, o ângulo α é aproximadamente o mesmo na posição inicial e após as deformações:

$$\cos \alpha = \frac{\Delta l_1}{\delta_p} = \frac{\Delta l_2}{\delta_p}; \delta_p = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} = \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha}$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{25 \cdot 50}{12500 \cdot 2,0} = 0,5 \text{ cm}$$

Portanto, $\delta_p = 0,5/0,8 = 0,625 \text{ cm}$.

Exercício proposto 7.1 Determine os valores máximos da tensão normal e do deslocamento longitudinal sabendo que apenas o efeito das forças

longitudinais, que são axiais, deve ser considerado. Dado: módulo de deformação longitudinal $E = 12.000 \text{ kN/cm}^2$:

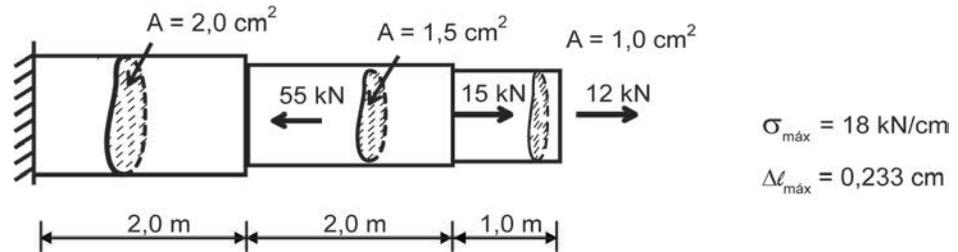


Figura 7.21 Barra engastada e isostática.

Exercício proposto 7.2 Determine o valor admissível da força F mantendo o sentido indicado na figura. Considere apenas o efeito das forças longitudinais, que são axiais. Dados: tensão normal de tração admissível $\sigma_{t,adm} = 100 \text{ MPa}$; e tensão normal de compressão admissível $\sigma_{c,adm} = 300 \text{ MPa}$:

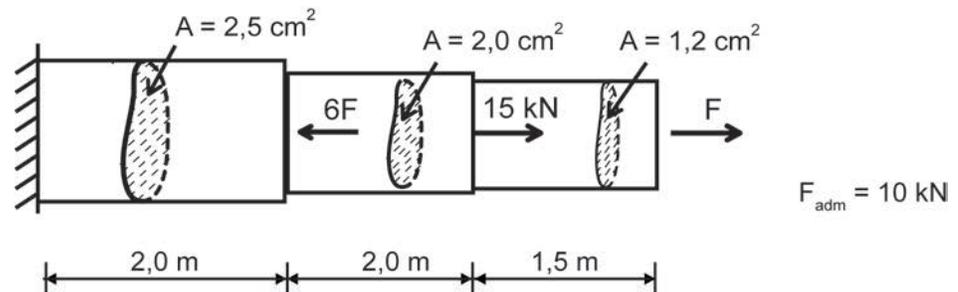


Figura 7.22 Barra engastada e isostática.

Exercício proposto 7.3 Determine o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga P desprezando o efeito do peso próprio das barras. Dados: tensão normal de tração admissível $\sigma_{t,adm} = 120 \text{ MPa}$; tensão normal de compressão admissível $\sigma_{c,adm} = 400 \text{ MPa}$; módulo de deformação longitudinal $E = 12.000 \text{ kN/cm}^2$; e área da seção transversal $A = 1,5 \text{ cm}^2$:

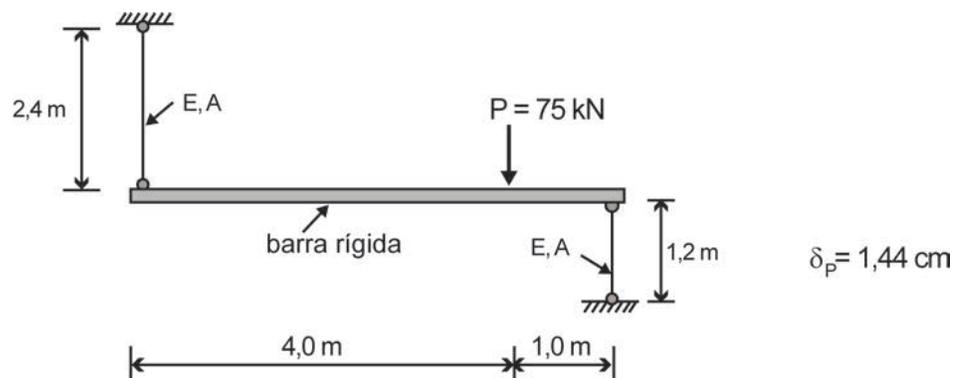


Figura 7.23 Estrutura composta de barra rígida e barras deformáveis.

7.4 Considerações finais

Admitindo material no regime elástico-linear, valores da tensão normal e do deslocamento longitudinal são calculados em trechos tracionados ou comprimidos – peças curtas –, com (N, E, A) constantes. Por superposição de efeitos, é possível traçar o diagrama do deslocamento longitudinal e indicar o valor máximo.

Valores das forças aplicadas são determinados respeitando a condição de resistência do material, ou seja, a tensão atuante não ultrapassa a tensão admissível.

UNIDADE 8

Flexão de barras de seção simétrica

8.1 Primeiras palavras

A influência do momento fletor é preponderante na flexão. São deduzidas as equações da tensão normal e da tensão de cisalhamento em decorrência do momento fletor e da força cortante, respectivamente. Os esforços ativos e reativos atuam no plano de simetria da seção transversal.

Utilizando os esforços solicitantes é possível a seguinte classificação:

- Flexão pura: $N = 0, V = 0, M \neq 0$;
- Flexão simples: $N = 0, V \neq 0, M \neq 0$;
- Flexão composta: $N \neq 0, V \neq 0, M \neq 0$.

8.2 Problematizando o tema

Barras fletidas são aquelas em que a seção transversal apresenta momento fletor. Didaticamente, diferenciam-se diversos tipos de flexão, conforme classificação do item anterior. Para as situações mais simples da engenharia, pode-se dizer que normalmente existe flexão em barras quando há forças aplicadas transversais ao seu eixo.

Voltando ao modelo da régua, uma força axial aplicada não provocou deformação ou alongamento visível. Aplicando uma força vertical no meio da régua, apoiada nas extremidades, você percebe nitidamente a sua deflexão, principalmente se ela estiver na posição “deitada”. As deformações são visíveis e decorrem quase totalmente da flexão – efeito do momento fletor –, embora haja outras componentes menos importantes que provocam deformação.

8.3 Tensão normal

Por hipótese, as deformações são pequenas, e seções planas continuam planas após as deformações. Na seção transversal de uma barra flexionada, existem pontos tracionados $\sigma > 0$ e pontos comprimidos $\sigma < 0$. Logo, devem existir pontos com $\sigma = 0$ que, na seção transversal, definem a linha neutra (LN). Considerando as infinitas seções ao longo do comprimento da barra, tem-se a superfície neutra:

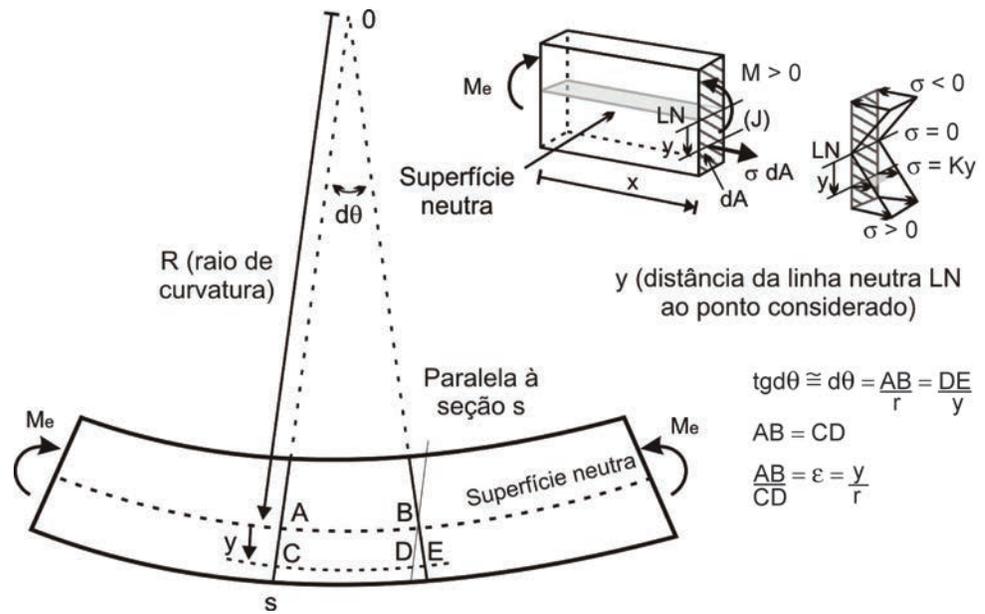


Figura 8.1 Tensão normal e deformação longitudinal de uma barra flexionada.

Lei de Hooke: $\sigma = E \cdot \epsilon = E \cdot (y/r) = (E/r) \cdot y = k \cdot y$

Relação entre esforço solicitante e tensão:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA \quad \text{e} \quad M = \int_A \sigma \cdot dA \cdot y$$

Na flexão pura e na flexão simples, a força normal N é nula:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = M = \int_A k \cdot y \cdot dA = k \cdot \int_A y \cdot dA = 0$$

Mas $k = \frac{E}{r} \neq 0$. Logo, $\int_A y \cdot dA = 0$.

Conclui-se que a linha neutra (LN) contém o CG da seção transversal:

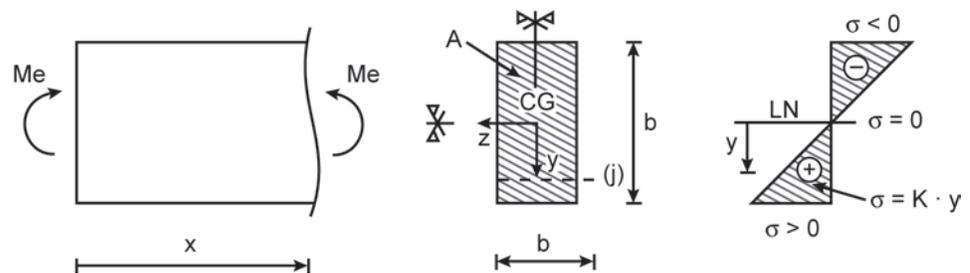


Figura 8.2 Momento fletor, eixos (y,z) e tensão normal.

Substituindo $\sigma = k \cdot y$ na equação do momento fletor:

$$M = \int_A \sigma \cdot dA \cdot y = \int_A k \cdot y \cdot dA \cdot y = k \cdot \int_A y^2 \cdot dA$$

Chamando $I_z = \int_A y^2 \cdot dA$ de momento de inércia em relação ao eixo z:

$$M = k \cdot I_z. \text{ Logo, } k = M/I_z \text{ e } \sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y.$$

Por convenção, $M > 0$ traciona a parte inferior da seção transversal. Como I_z é sempre positivo, orienta-se o sentido $y > 0$ para baixo.

8.4 Tensão de cisalhamento

Na flexão simples, além do momento fletor M , existe a força cortante V que resulta da tensão de cisalhamento τ . Analisa-se um elemento infinitesimal de comprimento dx :

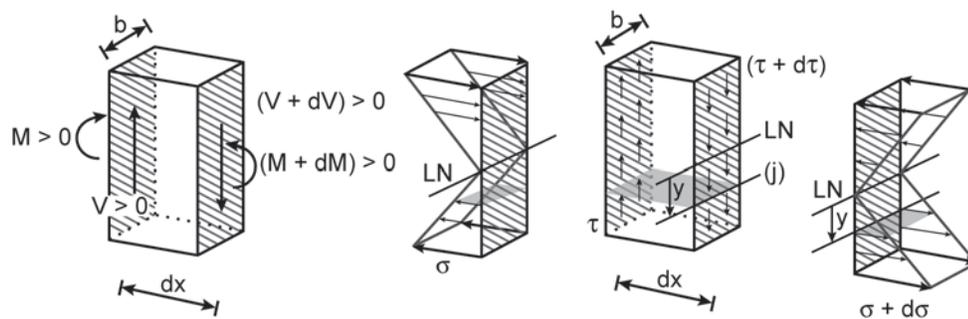


Figura 8.3 Esforços solicitantes, tensão normal e tensão de cisalhamento.

Um corte longitudinal na altura da fibra (j), posicionada a uma distância y da linha neutra (LN), divide o elemento infinitesimal em duas partes. Considera-se a parte inferior:

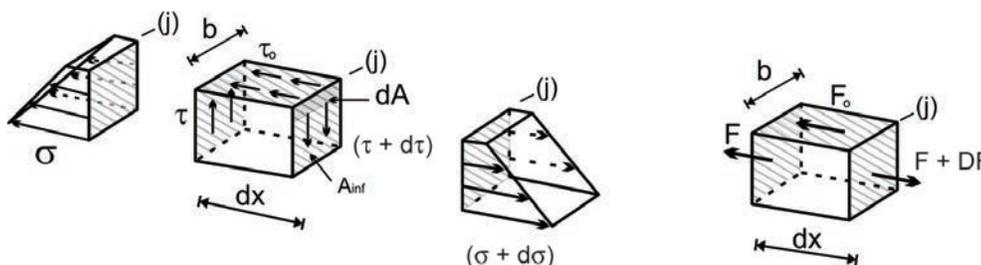


Figura 8.4 Tensões e forças na parte abaixo da fibra (j).

Admite-se que a tensão de cisalhamento τ_0 seja distribuída uniformemente na área de corte ($b \cdot dx$). Assim, $F_0 = \tau_0 \cdot b \cdot dx$.

Da tensão normal s atuando na área A_{inf} resulta a força:

$$F = \int_{A_{inf}} \sigma \cdot dA = \int_{A_{inf}} \frac{M}{I_z} \cdot y \cdot dA.$$

$$\text{Analogamente, } dF = \int_{A_{inf}} \sigma \cdot dA = \int_{A_{inf}} \frac{dM}{I_z} \cdot y \cdot dA.$$

Aplicando a equação de equilíbrio de forças na direção longitudinal:

$$\sum F_x = 0: (F + dF) - F_0 - F = 0 \quad F_0 = dF$$

$$\text{Logo, } \tau_0 \cdot b \cdot dx = \int_{A_{inf}} \frac{dM}{I_z} \cdot y \cdot dA.$$

$$\text{Rearranjando, } \tau_0 = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{I_z} \int_{A_{inf}} y \cdot dA.$$

Lembrando que $\frac{dM}{dx} = V$ e chamando $S_z = \int_{A_{inf}} y \cdot dA$ de momento estático da área abaixo da fibra (j) da seção transversal, obtém-se:

$$\tau_0 = \frac{V \cdot S_z}{b \cdot I_z}$$

Fazendo dx tender a zero, $d\tau$ também tende a zero. Pelo teorema de Cauchy, as tensões de cisalhamento são iguais em planos perpendiculares, logo

$$d\tau = \tau_0 = \frac{V \cdot S_z}{b \cdot I_z}.$$

8.4.1 Momento estático dos pontos da fibra (j) em relação ao eixo z

Em relação ao eixo z:

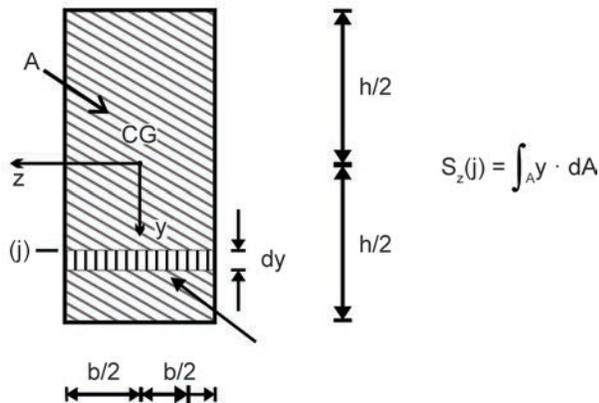


Figura 8.5 Seção transversal retangular.

$$S_{z, \text{abaixo}} = \int_y^{h/2} y \cdot b \cdot dy = \left(\frac{b}{2} \cdot y^2 \right) \Big|_y^{h/2} = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$S_{z, \text{acima}} = \int_{-h/2}^y y \cdot b \cdot dy = \left(\frac{b}{2} \cdot y^2 \right) \Big|_{-h/2}^y = \frac{b}{2} \cdot \left[-y^2 - \left(-\frac{h^2}{4} \right) \right] =$$

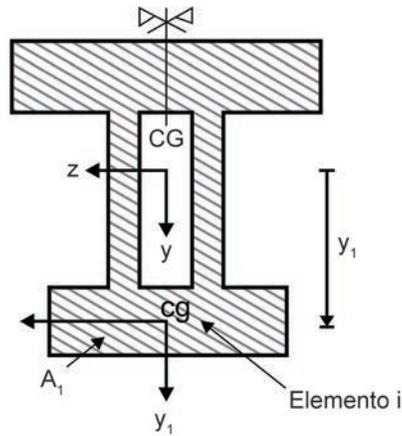
$$= -\frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Integrando a área abaixo ou acima da fibra (j), resulta o mesmo valor com sinais trocados para o momento estático. O sinal negativo não é considerado.

Nos pontos das bordas superior e inferior, $h = -h/2$ e $h = h/2$, o momento estático é nulo. Nos pontos da fibra do CG, $y = 0$, o momento estático é máximo.

Na seção transversal retangular, o diagrama da tensão de cisalhamento t é uma parábola em decorrência do momento estático que varia com y^2 .

No cálculo do momento estático para seções transversais compostas por retângulos, círculos e triângulos, a integral pode ser substituída por um somatório:



$$S_z(j) = \int_A y \cdot dA = \sum_{i=1}^n A_i \cdot Y_i$$

n = número de elementos da área acima ou abaixo da fibra (j)

A_i = área do elemento (i)

y_i = distância do cg_i ao CG

Figura 8.6 Seção transversal composta de retângulos.

8.5 Deformação por flexão

Apenas o efeito do momento fletor é considerado. A posição deformada do eixo da barra define a linha elástica ou simplesmente elástica.

Admite-se o deslocamento transversal $v > 0$ no sentido da parte tracionada por um momento fletor $M > 0$:

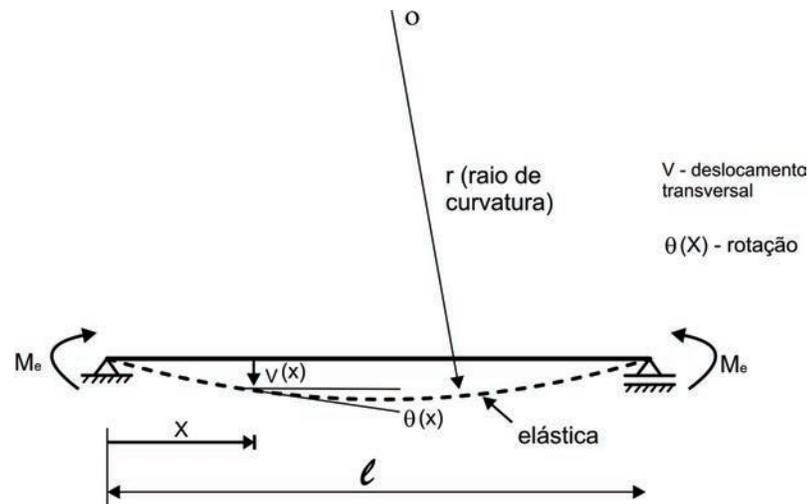


Figura 8.7 Elástica de uma barra flexionada.

Utilizando a Lei de Hooke, escreve-se:

$$\frac{M}{I_z} \cdot y = E \cdot \frac{y}{r} \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{E \cdot I_z}$$

Da geometria diferencial:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Ocorrendo deformações pequenas é razoável desprezar o termo $(dv/dx)^2$.

$$\text{Assim, } \frac{1}{r} = \frac{d^2v}{dx^2}.$$

Igualando a curvatura $(1/r)$ obtida da Lei de Hooke e da geometria diferencial:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I_z}$$

A rigidez contra a flexão $(E \cdot I_z)$ é um valor sempre positivo. Os sinais do momento fletor e da derivada segunda de $v(x)$ devem ser coerentes. De um $M > 0$ resulta $(d^2v/dx^2) < 0$, e, com um sinal negativo na equação diferencial, esse problema é contornado.

$$\text{Portanto, } \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot I_z}.$$

Problema 8.1 Para a barra do Problema 6.1, cujos diagramas dos esforços solicitantes são apresentados na Figura 8.8, pede-se: a) utilizando a seção transversal (I), desenhe os diagramas da tensão de cisalhamento e da tensão normal nas seções dos esforços solicitantes máximos; b) determine os valores máximos da tensão de cisalhamento, da tensão normal de tração e da tensão normal de compressão na seção transversal (II):

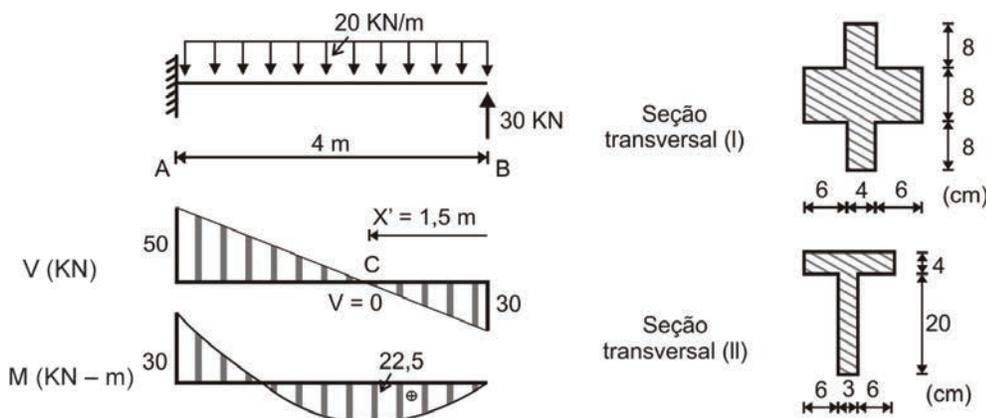


Figura 8.8 Barra engastada e isostática.

Características geométricas:

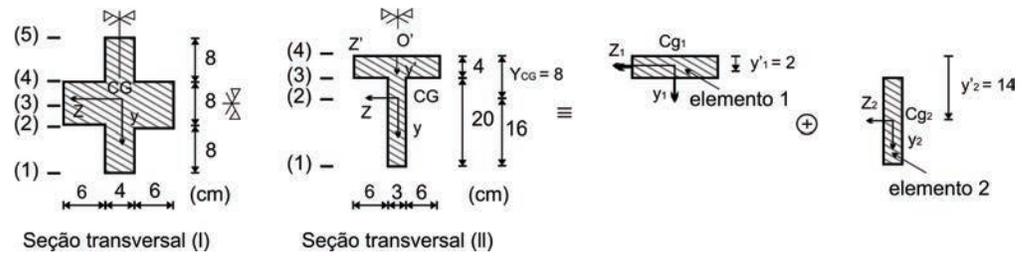


Figura 8.9 Centro de gravidade e fibras das seções transversais.

Posição do centro de gravidade: o CG da seção transversal (I) encontra-se na interseção dos dois eixos de simetria. Para determinar o CG da seção transversal (II), é conveniente fixar os eixos de referência (y'_i, z'_i) no eixo de simetria. Assim, $z_{cg} = 0$:

$$y_{cg} = \frac{A_1 \cdot y'_1 + A_2 \cdot y'_2}{A_1 + A_2} = \frac{15 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 20 \cdot 14}{15 \cdot 4 + 3 \cdot 20} = 8 \text{ cm}$$

Momento estático em relação ao eixo z: pontos das bordas inferior e superior:

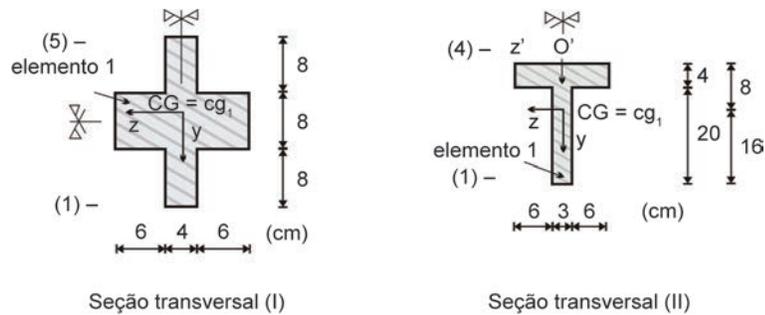


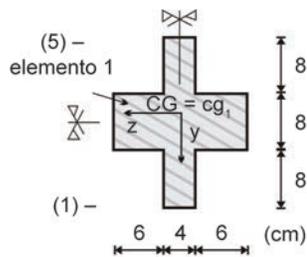
Figura 8.10 Área acima da borda inferior ou abaixo da borda superior.

Chamando a seção transversal de elemento 1, obtém-se $S_z(j) = A_1 \cdot y_1$. A distância y_1 é nula, pois o (cg_1) do elemento 1 coincide com o CG da seção transversal. Assim:

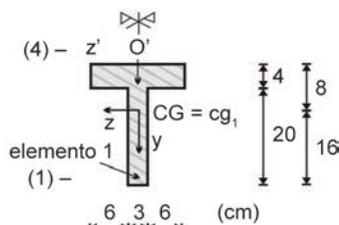
Seção transversal (I): $S_z(1) = S_z(5) = 0$

Seção transversal (II): $S_z(1) = S_z(4) = 0$

Pontos da fibra (2):



Seção transversal (I)



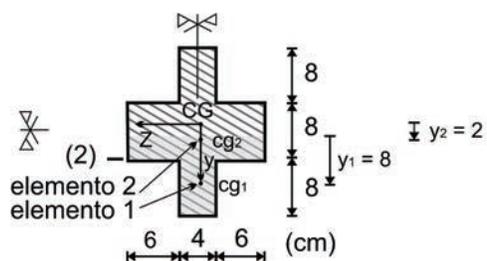
Seção transversal (II)

Figura 8.11 Área abaixo da fibra (2).

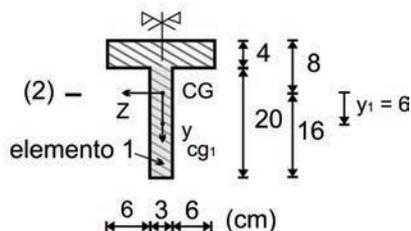
Seção transversal (I): $S_z(2) = A_1 \cdot y_1 = 4 \cdot 8 \cdot 8 = 256 \text{ cm}^3$

Seção transversal (II): $S_z(2) = A_1 \cdot y_1 = 3 \cdot 16 \cdot 8 = 384 \text{ cm}^3$

Pontos da fibra (3):



Seção transversal (I)



Seção transversal (II)

Figura 8.12 Área abaixo da fibra (3).

Seção transversal (I): $S_z(2) = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 = 4 \cdot 8 \cdot 8 + 16 \cdot 4 \cdot 2 = 384 \text{ cm}^3$

Seção transversal (II): $S_z(2) = A_1 \cdot y_1 = 3 \cdot 20 \cdot 6 = 360 \text{ cm}^3$

Momento de inércia em relação ao eixo z:

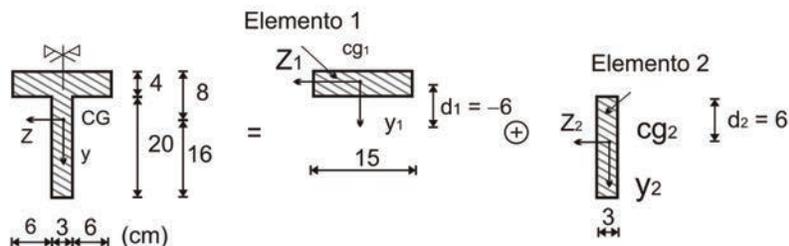
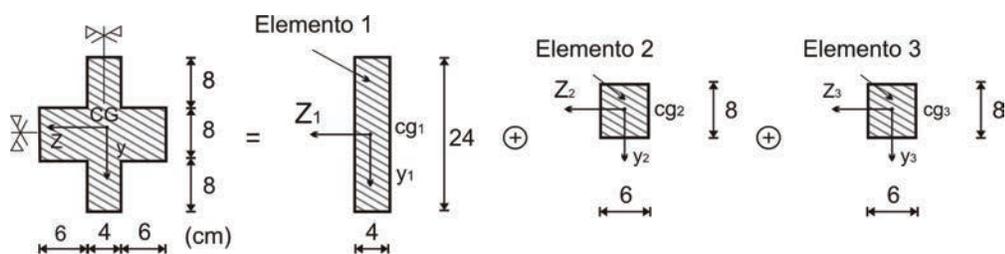


Figura 8.13 Partição das seções transversais (I) e (II).

Seção transversal (I):

$d_1 = d_2 = d_3 = 0$, pois CG, cg_1 , cg_2 e cg_3 estão alinhados:

$$I_z = \left[\frac{4 \cdot 24^3}{12} + (4 \cdot 24) \cdot 0^2 \right] + \left[\frac{6 \cdot 8^3}{12} + (6 \cdot 8) \cdot 0^2 \right] + \left[\frac{6 \cdot 8^3}{12} + (6 \cdot 8) \cdot 0^2 \right] = 5.120 \text{ cm}^4$$

Seção transversal (II):

$$I_z = \left[\frac{15 \cdot 4^3}{12} + (15 \cdot 4) \cdot (-6)^2 \right] + \left[\frac{3 \cdot 20^3}{12} + (3 \cdot 20) \cdot 6^2 \right] = 6.400 \text{ cm}^4$$

a) Diagramas das tensões da seção transversal (I):

$$v_{\text{máx}} = 50 \text{ kN seção A}$$

$$\tau(1) = \tau(5) = 0, \text{ pois } S_z(1) = S_z(5) = 0$$

$$\tau(2)_{\text{abaixo}} = \tau(4)_{\text{acima}} = \frac{50 \cdot 256}{4 \cdot 5120} = 0,625 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau(2)_{\text{acima}} = \tau(4)_{\text{abaixo}} = \frac{50 \cdot 256}{16 \cdot 5120} = 0,156 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau(3) = \frac{50 \cdot 384}{16 \cdot 5120} = 0,234 \text{ kN/cm}^2$$

$$M_{\text{máx}} = -30 \text{ kN} \cdot \text{m} = -3,000 \text{ kN} \cdot \text{cm seção A}$$

$$\sigma(1) = \frac{-3000}{5120} \cdot 12 = -7,03 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma(2) = \frac{-3000}{5120} \cdot 4 = -2,34 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma(3) = 0, \text{ pois } y(3) = 0$$

$$\sigma(4) = \frac{-3000}{5120} \cdot (-4) = 2,34 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma(5) = \frac{-3000}{5120} \cdot (-12) = 7,03 \text{ kN/cm}^2$$

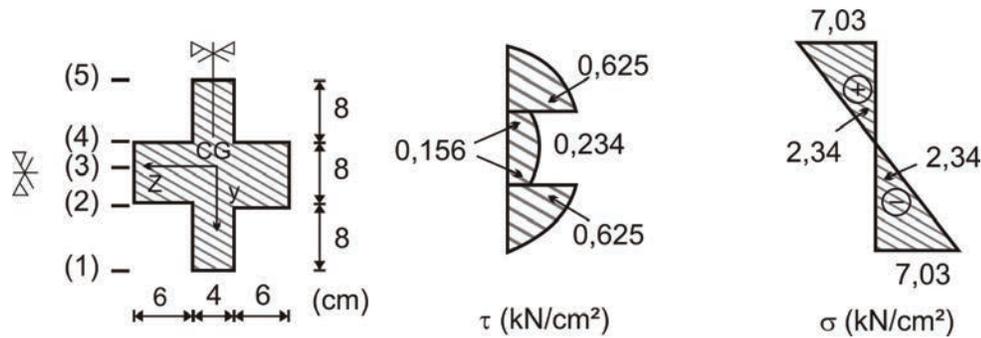


Figura 8.14 Diagramas da tensão de cisalhamento e tensão normal.

O momento estático $S_z(j)$ sempre é máximo na fibra que contém o CG. No entanto, a tensão de cisalhamento $\tau(j)$ nem sempre é máxima nos pontos da fibra do CG. Deve-se analisar a relação $[S_z(j)/b]$ máxima.

b) Valores máximos das tensões da seção transversal (II):

Seção A: $v_{\text{máx}} = 50 \text{ kN}$; $M_{\text{máx}} = -30 \text{ kN} \cdot \text{m} = -3,000 \text{ kN} \cdot \text{cm}$

$$\tau_{\text{máx}} = \tau(2) = \frac{50 \cdot 384}{3 \cdot 6400} = 1,0 \text{ kN/cm}^2$$

É suficiente analisar apenas os pontos da fibra (2) que contém o CG, pois $S_z(2)$ é máximo, e $b = 3 \text{ cm}$ é a menor dimensão da seção transversal, tornando a relação $[S_z(2)/b]$ máxima:

$$\sigma(1) = \frac{-3000}{6400} \cdot 16 = -7,50 \text{ kN/cm}^2 \quad \sigma(4) = \frac{-3000}{6400} \cdot (-8) = 3,75 \text{ kN/cm}^2$$

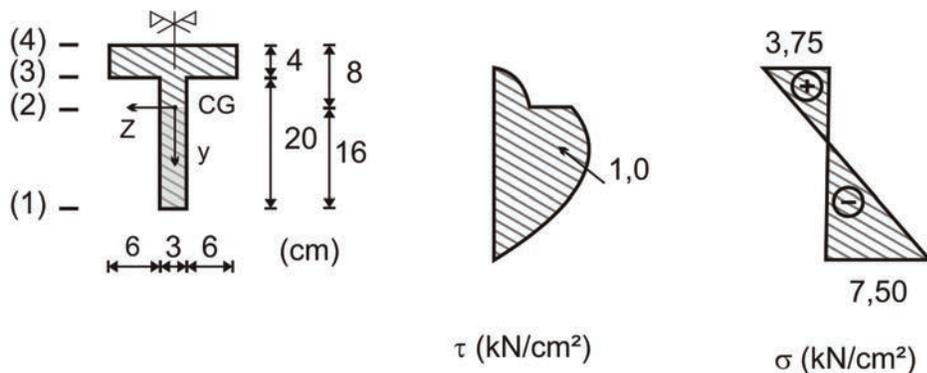


Figura 8.15 Esboço dos diagramas das tensões.

Aparentemente, a resposta $\sigma_{t,\text{máx}} = \sigma(4)$ e $\sigma_{c,\text{máx}} = \sigma(1)$ está correta, pois as tensões são determinadas com o máximo momento fletor M – seção A – nos pontos das fibras (1) e (4), que são os mais distantes do CG. Pelo fato de a

seção transversal não ser duplamente simétrica, a seção C com $M = 22,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ deve ser analisada. Em seção duplamente simétrica, é suficiente analisar apenas a seção de máximo momento fletor, pois a distância y da borda inferior é a mesma da borda superior.

$$\text{Seção C: } V = 0, \quad M = 22,5 \text{ kN} \cdot \text{m} = 2.500 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\tau = 0, \text{ pois } V = 0$$

$$\sigma(1) = \frac{2250}{6400} \cdot 16 = 5,62 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma(2) = \frac{2250}{6400} \cdot (-8) = -2,81 \text{ kN/cm}^2$$

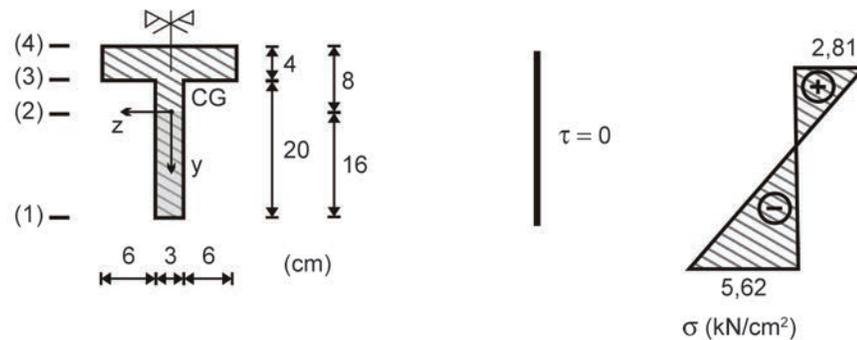


Figura 8.16 Esboço dos diagramas das tensões.

Das seções A e C analisadas, resultam os valores máximos das tensões:

$$\tau_{\text{máx}} = 1,0 \text{ kN/cm}^2 \text{ nos pontos da fibra (2) da seção A;}$$

$$\tau_{t, \text{máx}} = 5,62 \text{ kN/cm} \text{ nos pontos da fibra (1) da seção C;}$$

$$\tau_{c, \text{máx}} = 7,50 \text{ kN/cm} \text{ nos pontos da fibra (1) da seção A.}$$

Em seção transversal não duplamente simétrica, deve-se analisar o produto $(M \cdot y)$ máximo nas seções de momentos fletores máximos.

Problema 8.2 Na seção B, determine o deslocamento transversal do eixo das barras (I) e (II). Despreze o efeito da força cortante. Dado: rigidez contra a flexão $E \cdot I_z = 25.000 \text{ kN/m}^2$:

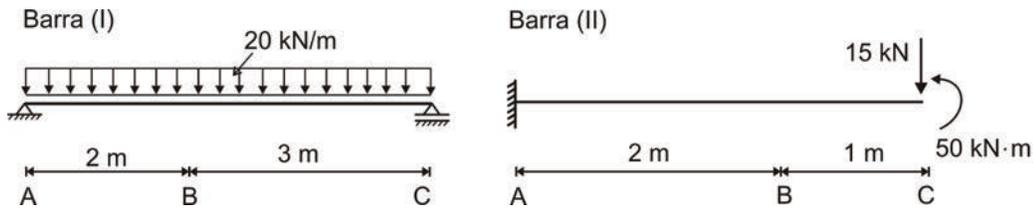


Figura 8.17 Vinculação e carregamento das barras.

Cálculo das reações: barra (I):

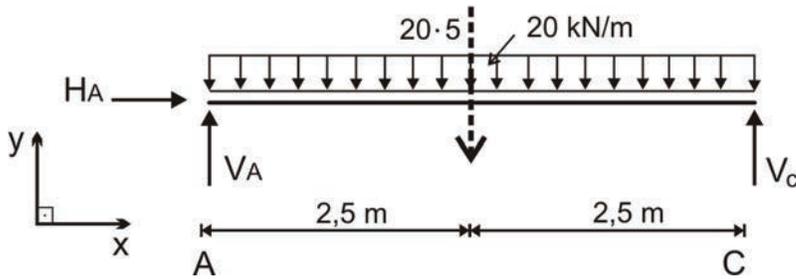


Figura 8.18 Esforços ativos e reativos.

Equações de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0: H_A = 0 \quad \sum F_y = 0: V_A + V_C - 20 \cdot 5 = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0: V_C \cdot 5 - 20 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0 \quad (2)$$

De (1), (2): $V_A = 50 \text{ kN}$ e $V_C = 50 \text{ kN}$.

Barra (II): com x' da extremidade livre para o engastamento fixo, não é necessário calcular as reações:

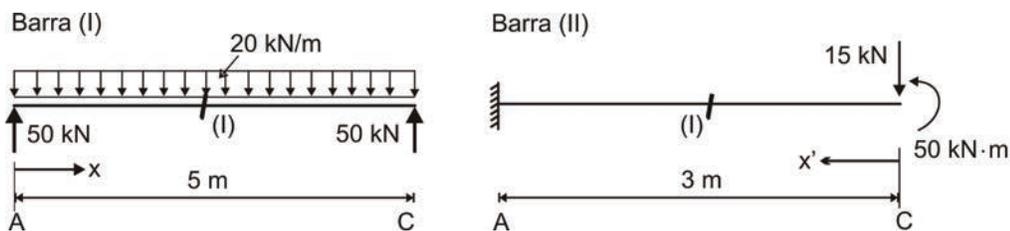


Figura 8.19 Corte imaginário nas barras.

Esforços solicitantes:

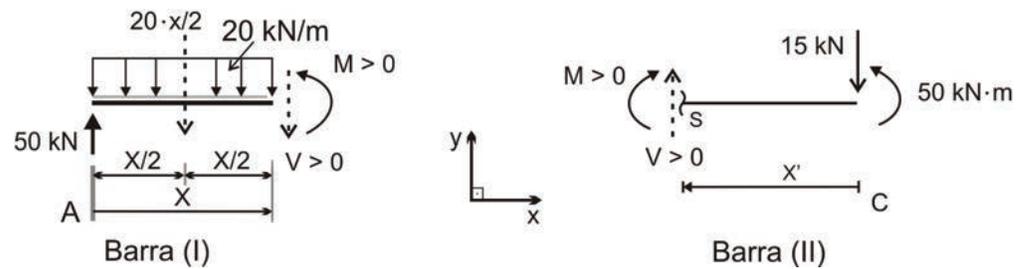


Figura 8.20 Esforços do corte imaginário nas barras.

O efeito da força cortante não é considerado.

Equação de equilíbrio – momento fletor:

$$\text{Barra (I)} \quad -\sum M_s = 0: M + 20 \cdot x \cdot x/2 - 50 \cdot x = 0 \quad M = -10 \cdot x^2 + 50 \cdot x$$

$$\text{Barra (II)} \quad -\sum M_s = 0: M + 15 \cdot x' - 50 = 0 \quad M = -15 \cdot x' + 50$$

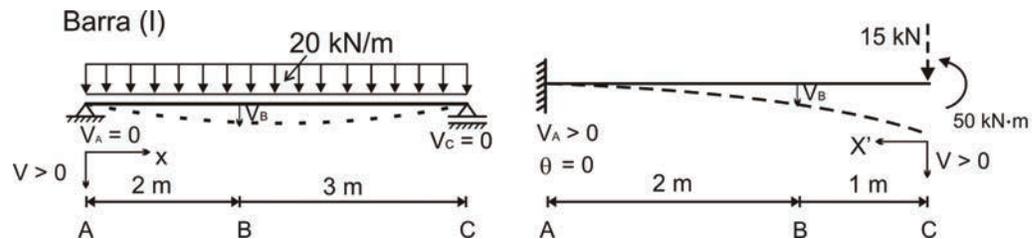


Figura 8.21 Linha elástica das barras.

Substituindo o momento fletor M na equação da linha elástica e integrando duas vezes:

Barra (I):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\left(\frac{-10 \cdot x^2 + 50 \cdot x}{25000}\right) = \frac{1}{25000} \cdot (10 \cdot x^2 - 50 \cdot x)$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{25000} \cdot \left(10 \cdot \frac{x^3}{3} - 50 \cdot \frac{x^2}{2}\right) + c_1$$

$$V = \frac{1}{25000} \cdot \left(10 \cdot \frac{x^4}{12} - 50 \cdot \frac{x^3}{6}\right) + c_1 \cdot x + c_2$$

Condições de contorno:

$v_A = 0$ em $x = 0$ e $v_c = 0$ em $x = 5\text{ m}$ (por causa dos apoios)

$$v_A = v(0) = \frac{1}{25000} \cdot \left(10 \cdot \frac{0^4}{12} - 50 \cdot \frac{0^3}{6} \right) + c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \quad c_2 = 0$$

$$v_c = v(5\text{ m}) = \frac{1}{25000} \cdot \left(10 \cdot \frac{5^4}{12} - 50 \cdot \frac{5^3}{6} \right) + c_1 \cdot 5 + 0 = 0 \quad c_1 = 4,1667 \cdot 10^{-3}$$

Portanto:

$$v = \frac{1}{25000} \cdot \left(10 \cdot \frac{x^4}{12} - 50 \cdot \frac{x^3}{6} \right) + 4,1667 \cdot 10^{-3} \cdot x$$

$$v_B = v(2\text{ m}) = \frac{1}{25000} \cdot \left(10 \cdot \frac{2^4}{12} - 50 \cdot \frac{2^3}{6} \right) + 4,1667 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,62 \text{ cm}$$

Barra (II):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = - \left[\frac{-15 \cdot (x') + 50}{25000} \right] = \frac{1}{25000} \cdot [15 \cdot (x') - 50]$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{25000} \cdot \left[15 \cdot \frac{(x')^2}{2} - 50 \cdot (x') \right] + c_1$$

$$v = \frac{1}{25000} \cdot \left[15 \cdot \frac{(x')^3}{6} - 50 \cdot \frac{(x')^2}{2} \right] + c_1 \cdot (x') + c_2$$

Condições de contorno: em $x = 3\text{ m}$, $v_A = 0$ e $\theta_A = 0$, por causa do engastamento fixo:

$$v_A = v(3\text{ m}) = \frac{1}{25000} \cdot \left[15 \cdot \frac{3^3}{6} - 50 \cdot \frac{3^2}{2} \right] + c_1 \cdot 3 + c_2 = 0 \quad (8.1)$$

$$\theta_A = \left(\frac{dv}{dx} \right) \Big|_{x=3\text{ m}} = \frac{1}{25000} \cdot \left[15 \cdot \frac{3^2}{2} - 50 \cdot 3 \right] + c_1 = 0 \quad (8.2)$$

De (8.1) e (8.2): $c_1 = 3,3 \cdot 10^{-3}$ e $c_2 = -3,6 \cdot 10^{-3}$

Portanto:

$$v = \frac{1}{25000} \cdot \left[15 \cdot \frac{(x')^3}{6} - 50 \cdot \frac{(x')^2}{2} \right] + 3,3 \cdot 10^{-3} \cdot (x') - 3,6 \cdot 10^{-3}$$

$$v_B = v(1\text{m}) = \frac{1}{25000} \cdot \left[15 \cdot \frac{1^3}{6} - 50 \cdot \frac{1^2}{2} \right] + 3,3 \cdot 10^{-3} \cdot 1 - 3,6 \cdot 10^{-3}$$

$$= -1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$= -0,12 \text{ cm}$$

O sinal negativo indica que o deslocamento transversal é para cima.

Exercício proposto 8.1. Desenhe os diagramas da tensão de cisalhamento e da tensão normal para as seções dos esforços solicitantes máximos:

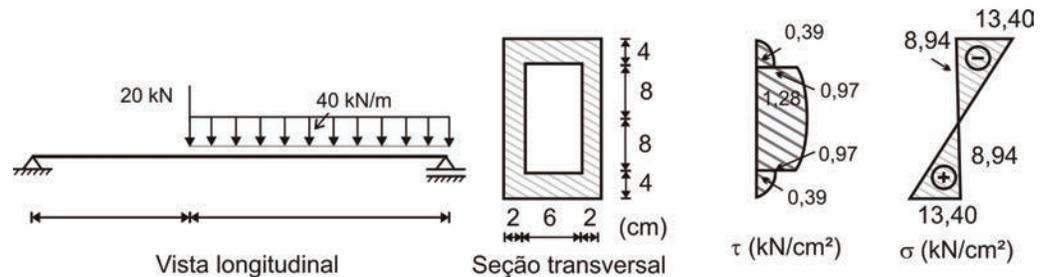


Figura 8.22 Barra biapoada e isostática.

Exercício proposto 8.2. Na seção transversal, determine os valores máximos da tensão de cisalhamento, da tensão normal de tração e da tensão normal de compressão:

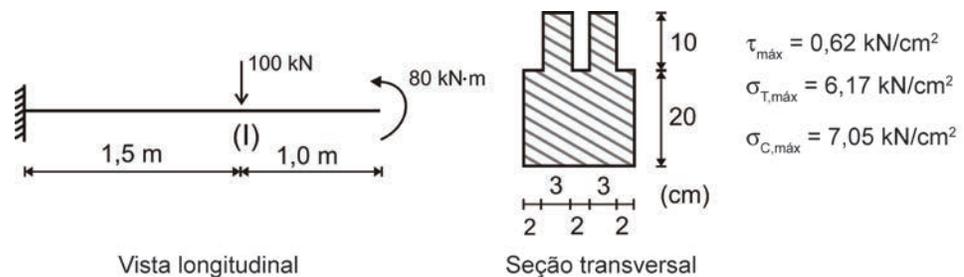


Figura 8.23 Barra engastada e isostática.

Exercício proposto 8.3. Na seção B, determine o deslocamento transversal do eixo das barras (I) e (II). Despreze o efeito da força cortante. Dado: rigidez contra a flexão $E \cdot I_z = 30.000 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$:

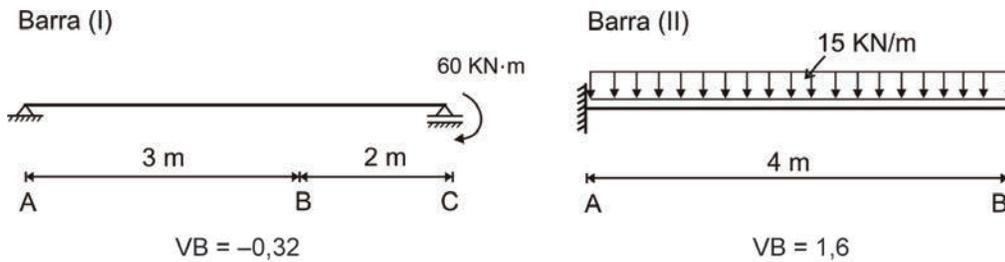


Figura 8.24 Vinculação e carregamento das barras.

8.6 Considerações finais

A máxima tensão de cisalhamento nem sempre ocorre nos pontos da fibra que contêm o CG, pois é necessário analisar a relação $[S_z(j)/b]$ máxima. No caso de seção transversal não duplamente simétrica, a pesquisa de valores máximos da tensão normal de tração e de compressão deve ser feita nas seções de momentos máximos, positivos e negativos, analisando o produto $(M \cdot y)$ máximo.

Para deduzir a equação da linha elástica, é necessário adotar uma coordenada ao longo do comprimento da barra e respeitar as condições de contorno conforme imposição dos vínculos.

REFERÊNCIAS

- BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. *Resistência dos materiais*. São Paulo: Makron Books/McGraw-Hill, 1982.
- _____. *Mecânica Vetorial para engenheiros: estática e dinâmica*. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.
- GERE, M. J. *Mecânica dos materiais*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- HIBBELER, R. C. *Engenharia Mecânica: Estática*. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- _____. *Resistência dos materiais*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2004.
- HIGDON, A. et al. *Mecânica dos materiais*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.
- _____. *Mecânica: dinâmica*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1984.
- KOMATSU, J. S. *Mecânica dos Sólidos elementar*. São Carlos: EdUFSCar, 2005. (Série Apontamentos).
- MERIAM, J. L. *Estática e Dinâmica*. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- POPOV, E. P. *Resistência dos materiais*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1984.
- SARKIS, M. *Mecânica técnica e resistência dos materiais*. São Paulo: Érica, 1999.
- SCHIEL, F. *Introdução à resistência dos materiais*. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1984.
- SHAMES, I. H. *Introdução à Mecânica dos Sólidos*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1983.
- SINGER, F. L. *Mecânica para engenheiros: estática e dinâmica*. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1977-1978.
- TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. *Mecânica dos Sólidos*. Rio de Janeiro: LTC, 1984.

SOBRE O AUTOR

Sydney Furlan Junior

Sydney Furlan Junior, engenheiro civil formado pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) em 1986, com mestrado e doutorado em engenharia de estruturas pela Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo (EESC-USP), é professor na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) desde 1989. Membro do Departamento de Engenharia Civil, atua no ensino de graduação nas disciplinas de Mecânica Aplicada à Engenharia, Teoria das Estruturas e Alvenaria Estrutural. Também integra o corpo docente do programa de pós-graduação em Construção Civil, no qual é responsável pela disciplina de Alvenaria Estrutural.

Sugestões podem ser enviadas ao professor pelo e-mail <sydney@ufscar.br>.

