Coleção UAB–UFSCar

Pedagogia

Cármen Lúcia Brancaglion Passos
Mauro Carlos Romanatto

A Matemática na formação de professores dos anos iniciais

aspectos teóricos e metodológicos

A Matemática na formação de professores dos anos iniciais

aspectos teóricos e metodológicos

UAB-UFSCar
Universidade Federal de São Carlos
Rodovia Washington Luís, km 235
13565-905 - São Carlos, SP, Brasil
Telefax (16) 3351-8420
www.uab.ufscar.br
uab@ufscar.br

EdUFSCar
Universidade Federal de São Carlos
Rodovia Washington Luís, km 235
13565-905 - São Carlos, SP, Brasil
Telefax (16) 3351-8137
www.editora.ufscar.br
edufscar@ufscar.br

Cármen Lúcia Brancaglion Passos
Mauro Carlos Romanatto

A Matemática na formação de professores dos anos iniciais

aspectos teóricos e metodológicos

São Carlos
EdUFSCar
2011

Concepção Pedagógica
Daniel Mill

Supervisão
Douglas Henrique Perez Pino

Equipe de Revisão Linguística
Ana Luiza Menezes Baldin
Daniela Silva Guanais Costa
Francimeire Leme Coelho
Jorge Ialanji Filholini
Letícia Moreira Clares
Lorena Gobbi Ismael
Luciana Rugoni Sousa
Marcela Luisa Moreti
Paula Sayuri Yanagiwara
Sara Naime Vidal Vital

Equipe de Editoração Eletrônica
Christhiano Henrique Menezes de Ávila Peres
Izis Cavalcanti

Equipe de Ilustração
Eid Buzalaf
Jorge Luís Alves de Oliveira
Priscila Martins de Alexandre

Capa e Projeto Gráfico
Luís Gustavo Sousa Sguissardi

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

P289m

Passos, Cármen Lúcia Brancaglion.
A Matemática na formação de professores dos anos iniciais : aspectos teóricos e metodológicos / Cármen Lúcia Brancaglion Passos, Mauro Carlos Romanatto. -- São Carlos : EdUFSCar, 2010.
69 p. – (Coleção UAB-UFSCar).

ISBN – 978-85-7600-209-3

1. Professores de matemática - formação. 2. Operações matemáticas. 3. Números. 4. Séries iniciais. I. Título.

CDD – 370.71 (20ª)
CDU – 371.13

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO 9

UNIDADE 1: A natureza do conhecimento matemático

1.1 Primeiras palavras 13

1.2 Problematizando o tema 13

1.3 Considerações iniciais 13

1.4 Afinal, o que faz um matemático? 16

1.5 Educação Matemática: alguns aspectos 19

1.6 Filosofia da Matemática e Educação Matemática: algumas aproximações 20

1.7 Algumas conclusões 21

1.8 Estudos complementares 22

UNIDADE 2: A função da Matemática no Ensino Fundamental

2.1 Primeiras palavras 25

2.2 Problematizando o tema 25

2.3 Introdução 25

2.4 O conhecimento matemático: principais características 27

2.5 A função da Matemática no Ensino Fundamental 29

2.6 A Matemática e a construção da cidadania 29

2.7 O aprendizado matemático 31

2.7.1 A aprendizagem matemática e o trabalho docente .33

2.8 Considerações sobre o aprendizado da matemática 34

2.9 Estudos complementares. 35

UNIDADE 3: Conteúdos matemáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental: enfoques teóricos e metodológicos

3.1 Primeiras palavras 39

3.2 Problematizando o tema. 39

3.3 Introdução 39

3.4 Os três tipos de conhecimento segundo Piaget 41

3.5 A noção de número natural 42

3.6 As crianças e a construção de escritas numéricas. 42

3.7 Atividades que o professor pode propor às crianças para identificar os conhecimentos que elas têm sobre os números 44

3.8 Algumas considerações 45

3.9 Estudos complementares. 45

UNIDADE 4: O sistema de numeração decimal e as operações fundamentais

4.1 Primeiras palavras 49

4.2 Problematizando o tema. 49

4.3 Compreendendo o nosso sistema de numeração .49

4.4 Os conceitos envolvendo as quatro operações fundamentais. 51

4.4.1 As operações fundamentais 51
4.4.2 As técnicas operatórias (os algoritmos) 56
4.4.3 O ensino da Aritmética: algumas sugestões 62
4.4.4 Propriedades das operações fundamentais. 63

4.5 Considerações finais 64

4.6 Estudos complementares. 64

4.7 Alguns comentários finais 64

REFERÊNCIAS 67

APRESENTAÇÃO

Este livro, destinado a professores que ensinam Matemática na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, procura mostrar essa área do conhecimento a partir de alguns elementos que pensamos ser essenciais para a formação matemática desses profissionais e, consequentemente, para o trabalho docente com os conteúdos matemáticos.

A primeira unidade busca caracterizar a Matemática como uma atividade humana em que o matemático procura nos objetos e fenômenos da realidade descobrir padrões de regularidade justificados logicamente. Assim, interagindo com problemas reais ou especulativos, o matemático tenta construir relações em que descreve, explica e prevê fatos e eventos da realidade.

A segunda unidade mostra a importância do conhecimento matemático para a inserção das pessoas no mundo atual e como esse conhecimento é imprescindível para a construção da cidadania.

Já a terceira unidade traz alguns comentários sobre o processo de aprendizagem matemática. Independentemente de teorias psicológicas, as crianças chegam à escola com conhecimentos que precisam ser considerados pelos professores, quer para aproveitá-los quer para refutá-los.

Em seguida, iniciamos discussões envolvendo os conteúdos matemáticos. Começando pela ideia de número natural, o texto aponta que as crianças utilizam os números em diversas atividades do dia a dia, mas isso não significa a sua compreensão. O conceito de número natural é um conhecimento lógico-matemático construído pela mente humana, e cabe aos professores desenvolver atividades que permitam que as crianças construam internamente essa relação. Escrever ou contar oralmente sequências de números não garantem a compreensão da noção de número natural no âmbito da Matemática.

Para finalizar, a quarta unidade aborda o sistema de numeração decimal, que merece uma discussão mais ampla e profunda, sobretudo no que concerne as suas propriedades, pois a não compreensão delas pode comprometer seriamente a capacidade de cálculo dos estudantes.

As operações fundamentais mereceram um duplo tratamento. Por meio da ideia de estruturas aditivas e multiplicativas, os aspectos qualitativos dessas operações foram abordados e elaborou-se uma proposta para que essas operações fossem trabalhadas aos pares, ou seja, adição e subtração e multiplicação e divisão.

Articulando as ideias qualitativas aos algoritmos, estes foram explicitados e justificados a partir de propriedades, especialmente aquelas relacionadas ao nosso sistema de numeração.

Em seus aspectos metodológicos, os conteúdos foram apresentados a partir de elementos históricos e, assim, a resolução de situações-problema reais ou especulativas sempre esteve presente na evolução do conhecimento matemático. Nesse sentido, o entendimento da evolução da Matemática na perspectiva em que trabalhamos pode ser um caminho promissor para uma Educação Matemática mais significativa para os nossos estudantes.

UNIDADE 1

A natureza do conhecimento matemático

1.1 Primeiras palavras

Nesta unidade propomos uma reflexão sobre a natureza do conhecimento matemático trazendo algumas concepções filosóficas que influenciam tanto a pesquisa quanto o ensino da matemática ao longo dos tempos. Discutimos o fazer do matemático e o fazer do educador matemático para que possamos, nessas reflexões, localizar o importante papel do professor que ensina matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

1.2 Problematizando o tema

Qual a influência que filósofos e matemáticos exerceram ou exercem na compreensão da natureza do conhecimento matemático? Por que em algumas situações do trabalho docente com o conhecimento matemático há sucesso e em outras ocorre fracasso?

Ao longo desta unidade essas e outras questões serão analisadas e discutidas.

1.3 Considerações iniciais

> *Toda didática da matemática, mesmo que seja pouco coerente, fundamenta-se em uma filosofia da matemática* (THOM, 1986, p. 75).

A natureza do conhecimento matemático nem sempre foi um assunto consensual entre filósofos e matemáticos.

Descartes, filósofo e matemático francês, afirmava que a certeza do conhecimento só pode vir da razão, pois é ela que nos fornece as verdades primeiras a partir das quais é possível obter todas as outras e construir assim a realidade. O conhecimento matemático era assim concebido.

Em outra perspectiva, o filósofo David Hume dizia que tudo o que sabemos tem origem na experiência, embora esta apenas nos mostra como as coisas acontecem e não que é impossível que aconteçam de outra maneira. Por exemplo, os sentidos nos mostram que o Sol nasceu hoje e nos outros dias anteriores, mas não podemos concluir que nascerá amanhã. E isso também vale para a Matemática.

É na filosofia de Kant que verificamos uma posição intermediária. Esse filósofo apresenta uma crítica tanto ao racionalismo quanto ao empirismo, defendendo que a ciência não pode ser constituída por juízos analíticos (juízos verdadeiros em virtude de sua forma), como queria Descartes e, por outro lado, a ciência também não pode ser constituída por juízos sintéticos (juízos fundamentados na experiência), como queria Hume.

Em Kant, o conhecimento é uma elaboração do sujeito. A intuição empírica (conhecimento imediato, sem intermediário, que pode ter origem na experiência ou ser *a priori*) nos permite apreender o objeto, representá-lo, mas é o entendimento que pensa esse objeto e é dele que provêm os conceitos. Assim, em Kant, todo conhecimento parte da experiência, mas o conhecimento deve se tornar independente da experiência, pois a ciência deve ser universal e necessária. Encontramos em Kant uma tentativa de se considerar tanto o aspecto lógico (razão) quanto o intuitivo (experiência) no que se refere à constituição do conhecimento, incluindo o conhecimento matemático.

No final do século XIX e início do século XX, três correntes filosóficas da Matemática – logicismo, intuicionismo e formalismo – pretenderam fundamentar a natureza da ciência Matemática. O *logicismo* se caracterizava pelo propósito de reduzir a Matemática à Lógica (que trata dos argumentos, isto é, das conclusões a que chegamos por meio da apresentação de evidências que as sustentam). O *intuicionismo* afirmava que a Matemática em sua formação abstrata é considerada puramente intuitiva. Já o *formalismo* uniu o método logicista ao método axiomático (escolha de axiomas ou postulados como verdades e, a partir deles, dedução de teoremas que podem ser demonstrados), como uma forma de garantir a consistência nas investigações em Matemática. Axioma é uma verdade evidente enquanto um postulado é uma verdade dada pela experiência.

Entretanto, alguns paradoxos na teoria dos conjuntos (*em uma cidade existe um barbeiro que só faz a barba dos homens que não se barbeiam; então, quem faz a barba do barbeiro?*); interpretações *diferentes* do que é a intuição; e conjecturas matemáticas que não são nem provadas e nem refutadas, por exemplo, a conjectura de Goldbach (*todo número par maior ou igual a 4 é a soma de dois números primos*) fizeram com que tais correntes falhassem em seus propósitos e a natureza do conhecimento matemático voltou a ser questionada.

Assim, outros autores procuraram analisar a Matemática não em termos de seus fundamentos, mas como ela é, ou seja, considerando-a como parte da criação humana e, como tal, sujeita a erros e correções.

Lakatos (1978), a partir da história da Matemática, considera que essa ciência não é diferente das ciências naturais, nas quais o conhecimento é *a posteriori* e falível. Sob seu ponto de vista, a Matemática é quase empírica. Uma teoria desse tipo concebe a ciência como falível (possível de falha), sendo suas afirmações básicas um conjunto especial de teoremas (sentenças de observações ou resultados experimentais e suas regras de inferências) que podem ser formulados sem muita precisão.

Para Davis & Hersh (1985), a Matemática não pode ser concebida como ciência apoiada em verdades absolutas, pois nossa experiência real com ela apresenta diversas incertezas. Sobre esse ponto, Davis & Hersh afirmam que a possibilidade de corrigir erros nas teorias matemáticas é, exatamente, dada em confronto com a experiência.

Thom (1986) defende que o conhecimento matemático não é absoluto afirmando que as formas matemáticas, de fato, possuem uma existência que é independente da mente que as considera e diferente da existência concreta no mundo externo, mas, ainda assim, tal existência, sutil e profundamente, relaciona-se a esse mundo.

Assim, para os matemáticos Lakatos (1978), Davis & Hersh (1985) e Thom (1986), a Matemática deixa de ser vista como uma ciência que repousa sobre verdades absolutas e passa a ser concebida como um conhecimento falível, corrigível, parcial e incompleto. A Matemática muda: não é o que era, não será o que é, e evolui por acúmulos e também por revoluções; é levada por seus problemas e as tentativas de resolvê-los, por suas crises, por seus fracassos e, ainda, pelas necessidades da ciência e da tecnologia. Em outras palavras, esses autores trazem uma concepção dinâmica e problemática da ciência matemática que continuamente expande o seu campo de criação e invenção, nos quais padrões são gerados e aprimorados. A Matemática não é um produto acabado, pois seus resultados estão sempre sob revisões.

Enfim, podemos dizer que essas correntes filosóficas buscam explicar o conhecimento matemático reconhecendo aspectos essenciais em sua constituição, quais sejam: a lógica, a intuição, a formalização, a experimentação, a falibilidade, a história, a cultura, bem como as revoluções científicas.

Assim sendo, se devemos ver a Matemática tal como ela é, podemos inferir que esses aspectos, entre outros, são essenciais na constituição do conhecimento matemático, devendo caminhar juntos nas discussões filosóficas. Uma proposta para ensinar Matemática, com certeza, teria maior possibilidade de sucesso se essa ciência fosse concebida dessa maneira.

1.4 Afinal, o que faz um matemático?

Em nosso dia a dia, em boa parte das profissões, é fácil identificar as funções e os afazeres dos profissionais. Assim, sabemos o que faz um engenheiro, um médico ou um advogado. No entanto, se perguntarmos o que faz um matemático, a resposta não parece tão fácil. Mas, enfim, o que faz um matemático?

Vamos ilustrar a especificidade da Matemática com um problema bastante simples discutido por Diniz (1991): *distribuir os números de 1 a 6, sem repetição, nos círculos da figura, de maneira que a soma dos números de cada lado seja 10*.

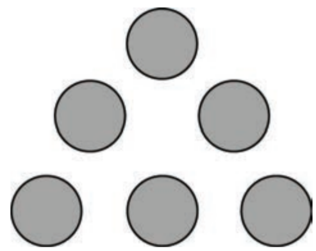

Figura 1 Triângulo formado por círculos.

Em um primeiro momento, as pessoas procuram a solução por meio de tentativas e erros, escrevendo aleatoriamente números de 1 a 6 nos círculos da figura. Quando não conseguem a soma 10 nos três lados da figura, apagam e tentam novamente. Algumas pessoas escrevem os números de 1 a 6 em papéis e procuram distribuí-los, até obter a soma 10 em todos os lados.

Embora a técnica de tentativa e erro seja válida para se encontrar a solução de um problema, não podemos depender sempre dela. Imagine uma figura em que temos que distribuir uma quantidade maior de números. Essa técnica, nesse caso, pode se mostrar difícil e demorada.

O que fazer?

A natureza específica da Matemática pode nos ajudar. Assim, na descoberta de padrões justificados logicamente podemos resolver de maneira rápida o problema.

Vamos distribuir os números de 1 a 6 nos círculos, chamando-os de: *a, b, c, d, e, f*.

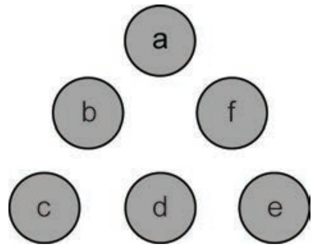

Figura 2 Triângulo formado por círculos preenchidos com letras.

Pelos dados do problema, temos que:

$$(a+b+c)+(c+d+e)+(e+f+a)=30$$

Ou seja, a soma dos três lados da figura.

Reescrevendo essa equação, obtemos:

$$a+b+c+d+e+f+a+c+e=30$$

Como $a+b+c+d+f+e$ são os números de 1 a 6, então essa adição dá como resultado o número 21.

Assim, $21+a+c+e=30$ e, portanto, $a+c+e=9$.

Dessa forma, descobrimos um padrão para esse problema. Ao distribuirmos os números de 1 a 6, sem repetição, nos círculos da figura e obtermos a soma 10, a condição necessária é que a soma dos números que estão nos vértices seja igual a 9.

Agora, vamos testar as somas iguais a 9 entre os números de 1 a 6 para distribuí-los nos vértices. Temos três somas iguais a 9: 1, 2 e 6; 2, 3 e 4; e 1, 3 e 5.

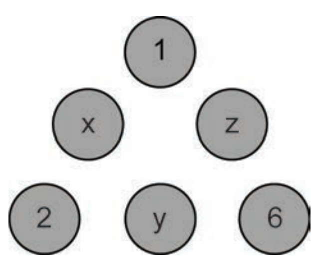

Figura 3 Triângulo formado por círculos preenchidos com letras e números: primeira possibilidade.

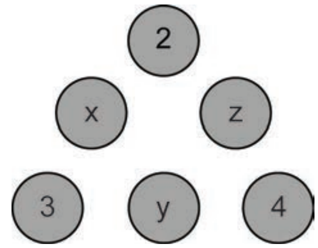

Figura 4 Triângulo formado por círculos preenchidos com letras e números: segunda possibilidade.

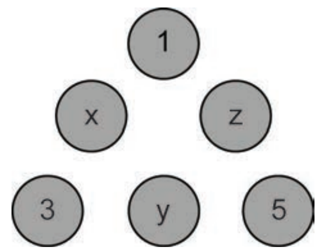

Figura 5 Triângulo formado por círculos preenchidos com letras e números: terceira possibilidade.

Ao tentarmos completar os lados dos triângulos, verificamos que as duas primeiras soluções, figuras 3 e 4, não atendem as condições do problema, pois os números se repetem ou em um caso o número é maior do que 6. Assim, apenas a última solução é a correta, qual seja:

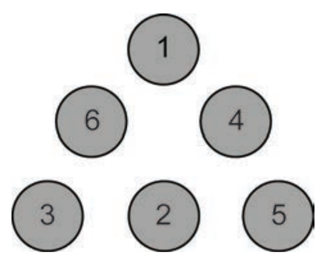

Figura 6 Triângulo formado por círculos: uma possível solução do problema.

Outras soluções diferem desta apenas na disposição dos números 1, 3 e 5 nos vértices e dos outros números nos lados.

A partir da descoberta de um padrão de regularidade para esse problema, poderíamos discutir se existem soluções para somas maiores e menores que 10. Se sim, qual é a menor e a maior soma?

Outros possíveis desdobramentos desse problema poderiam ser explorados, possibilitando assim que os estudantes façam matemática, o que é uma condição imprescindível para o aprendizado desse conhecimento, ao mesmo tempo em que dá sentido aos estudos da Matemática.

A partir desse exemplo do que faz um matemático é possível dar uma definição de Matemática não em termos filosóficos, mas em termos do seu fazer. Assim, podemos dizer que *a Matemática é uma ciência de objetos que possuem um padrão de regularidade e uma ordem lógica*.

1.5 Educação Matemática: alguns aspectos

Nossas discussões sobre a natureza do conhecimento matemático não têm nenhuma pretensão de repercussões no âmbito da Filosofia da Matemática. Nosso interesse é que tais discussões tenham algum reflexo no âmbito da Educação Matemática.

Steiner (1987) defende que posições filosóficas associadas à Matemática têm influenciado significativamente ideias que dirigem e condicionam princípios em Educação Matemática.

Miguel (1995), em uma análise nesta direção, destaca que entre Pitágoras, Platão, Euclides e Descartes há um modo comum de se conceber a Matemática, a saber, o *formalismo filosófico*, sustentando que o conhecimento matemático está organizado num sistema dedutivo que contém termos primitivos, definições, regras de inferências, axiomas, postulados e teoremas. O autor observa que no final do século XVIII surgiu um estilo de prática educativa, denominado *formalismo pedagógico*, voltado para a ênfase na quantidade de conhecimento a ser transmitido, pela preocupação excessiva da exposição, desligando o ensino de seu contexto histórico-social. Esse fato ocorreu porque os estilos de prática educativa se filiavam ao modo pelo qual o formalismo filosófico concebia a Matemática.

Fiorentini (1995), baseado na confluência de vários movimentos educacionais que ocorreram no Brasil, aponta seis tendências em Educação Matemática. São elas: *formalista clássica*, *empírico-ativista*, *formalista moderna*, *tecnicista e suas variações*, *construtivista* e *socioetnocultural*. Dois elementos utilizados pelo autor para essa classificação foram: a concepção de Matemática e a crença de como se processa a obtenção, a produção e a descoberta do conhecimento matemático. Esses dois elementos estão vinculados a uma Filosofia da Matemática. Assim, nesse estudo de Fiorentini (1995), é possível relacionar as concepções de conhecimento matemático, de ensino e de aprendizagem da Matemática a uma Filosofia da Matemática subjacente a cada uma das tendências apontadas.

Dessa maneira, o diálogo entre a Filosofia da Matemática e a Educação Matemática poderia revelar-se profícuo e esclarecedor, pois verificamos que a Filosofia da Matemática pode influenciar, se não total, ao menos parcialmente, a formação e a prática do professor.

1.6 Filosofia da Matemática e Educação Matemática: algumas aproximações

Estudos em Filosofia da Matemática parecem ser pertinentes não apenas para compreender aspectos da Educação Matemática, mas também para dar sugestões de rumos e mudanças a serem tomados. Com respeito a isso é oportuna a observação de Steiner (1987) de que a Educação Matemática e, especialmente, o conhecimento matemático e a prática dos professores deveriam ser, de um lado, guiados por uma Filosofia da Matemática adequada e, por outro lado, libertados de confinamentos desnecessários e inúteis.

Meneghetti (2006) citando Steiner (1987) ressalta que para a Educação Matemática devemos elaborar filosofias da Matemática que respeitem os seguintes aspectos: diferentes formas e condicionantes do conhecimento matemático; diferentes meios e modos de representações e atividades de tal conhecimento; relações entre desenvolvimento objetivo e subjetivo do conhecimento; relações do conhecimento matemático com outros conhecimentos; campos especiais e aplicações; e dimensões pessoais, sociais e políticas da Matemática.

Se a Matemática de hoje pode ser diferente da Matemática de amanhã, então as possíveis metodologias de ensino devem ser revistas ou até outras deverão ser propostas. A Educação Matemática também é falível, corrigível e significativa.

Para o professor de Matemática, uma pergunta é essencial: *como posso ensinar melhor a Matemática?* E, nesse sentido, o domínio dos conhecimentos atuais sobre a natureza da Matemática, articulado com as ciências da educação, pode resultar em caminhos férteis para que essa área de conhecimento seja apreendida pelos nossos estudantes de forma efetiva e com significado.

Seria extremamente importante que, na formação inicial, os futuros professores tivessem uma visão e uma experiência mais realista do que se entende por Matemática, assim como discussões sobre questões internas à própria disciplina.

Ao invés de uma ciência precisa, perfeita e imutável, o conhecimento matemático, por meio de sua história, deveria ser apresentado com seus momentos de crises, impasses, dúvidas, hesitações, descontinuidades, rupturas, conflitos e seu constante dinamismo, que colocam seus fundamentos em permanente discussão e revisão de diferentes naturezas.

Se partíssemos do pressuposto que aspectos filosóficos da Matemática fundamentam ou dirigem as práticas educativas desse conhecimento, então necessitaríamos conhecê-los para validar ou refutar tais práticas.

Apresentar essa disciplina da maneira como ela é produzida pode ser um caminho promissor para trabalhos diferenciados com a Educação Matemática, visando que estes sejam eficientes e deem sentido para os nossos estudantes em termos da apropriação tanto de um corpo de conhecimento quanto de formas de pensamento presentes na ciência matemática (e que são essenciais para a compreensão e atuação no mundo).

Um exemplo de um trabalho docente diferenciado com a Matemática deveria possibilitar aos estudantes o fazer matemática, que significa construí-la, produzi-la. Por meio de situações-problema inteligentes ou desafiadoras, o estudante formula perguntas, elabora hipóteses, exercita conjecturas, realiza experimentações e procura comprovações para encontrar a solução. Por fim, temos a sistematização, conduzida pelo professor, em que os conceitos, os princípios e os procedimentos matemáticos são enunciados tal como são conhecidos pela comunidade matemática.

Em resumo, boas propostas para a Educação Matemática devem ter por referência discussões adequadas sobre a Filosofia da Matemática, pois um correto conhecimento da natureza de uma ciência certamente traz contribuições positivas para o seu processo de ensino e de aprendizagem.

Nessa perspectiva, será possível estabelecer uma comparação entre a atividade do matemático (quando cria) e a atividade do estudante (quando aprende) na aula de Matemática? Obviamente, devemos considerar que os conhecimentos que o matemático possui, os processos que utiliza, o grau de especialização que atinge, o tempo e o interesse que dedica a sua atividade são incomparáveis com os do estudante. Entretanto, a atividade de resolução de problemas pode ser equivalente quanto a sua natureza.

1.7 Algumas conclusões

Se não existe uma pronta e acabada Filosofia da Matemática, isso deve também ocorrer com a Educação Matemática. Ou seja, não existe uma única prática educativa em relação a essa ciência. Existem vários caminhos para a Educação Matemática e mesmo assim cada um deles estará sempre sendo questionado, pois apresentam alcances e limites.

Ao explorarmos as mais diversas controvérsias em relação ao que é o conhecimento matemático e as repercussões para o seu ensino, acabamos por questionar a tradição escolar de associar uma única metodologia, assim como uma única racionalidade, à Matemática, fato que leva à concepção de que essa ciência é detentora de verdades universais e necessárias, sendo, portanto, livre de conflitos inerentes ao pluralismo de ideias e métodos.

Ao identificarmos as idas e vindas dos filósofos matemáticos na tentativa de comprovar a universalidade e a necessidade dos objetos matemáticos, notamos que algo semelhante deve acontecer com os educadores na busca de trabalhos diferenciados para o ensino do conhecimento matemático.

Essa constatação de que em determinados momentos da história do conhecimento matemático essa ciência esteve bem fundamentada para, logo em seguida, apresentar-se em crise, pode ser estendida ao dia a dia das salas de aula de Matemática. Em algumas situações, o trabalho docente com o conhecimento matemático pode ser pleno de sucesso e, em outras, temos a impressão de que tudo está perdido. Será?

Pensamos que, assim como os matemáticos criam seus modelos sem se preocuparem com suas possíveis inconsistências ou até mesmo se terão aplicações práticas, os educadores matemáticos devem ensinar a Matemática – na perspectiva de ela ser apreendida –, fazendo com que os estudantes a vivenciem nos seus mais diversos aspectos. Em seguida, os matemáticos – comportando-se como filósofos ou ajudados por eles – devem analisar e discutir os aspectos teóricos, abstratos ou formais, assim como a veracidade das teorias inventadas, e os professores – comportando-se como pesquisadores ou ajudados por eles – devem avaliar os elementos de seu trabalho em termos do aprendizado, ou não, do conhecimento matemático. Tanto as experiências bem-sucedidas quanto aquelas que apresentam problemas devem ser objetos de análise e reflexão.

Assim como a Matemática está em constante mudança, a tarefa do filósofo da Matemática está sempre incompleta. Nesse sentido, pensamos que a sala de aula de Matemática também está em constante mudança, o que faz com que o pesquisador em Educação Matemática sempre tenha questões para analisar e discutir, no intuito de identificar alguns aspectos que poderiam ser generalizados, visando a um ensino adequado dessa ciência.

Por fim, vemos que tanto a Filosofia da Matemática quanto a Educação Matemática falam sobre a Matemática e o seu processo de ensino, em função dos conhecimentos matemáticos e das ciências da educação existentes atualmente e que podem ser outras, em um momento posterior. É essa capacidade de enfrentar o novo ou as novas demandas que tanto a Filosofia quanto a Educação Matemática devem ter como objeto de investigação, pois nem os matemáticos vão parar de criar Matemática, nem as salas de aula de Matemática vão deixar de trazer novos e diferentes desafios.

1.8 Estudos complementares

O aprofundamento das questões aqui debatidas poderá ser feito a partir de leituras complementares. Uma que sugerimos é o artigo, citado nas referências, de Dario Fiorentini, o qual está disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/zetetike>.

UNIDADE 2

A função da Matemática no Ensino Fundamental

2.1 Primeiras palavras

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): matemática (BRASIL, 1997), documento oficial que utilizaremos neste livro, o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, em muitas oportunidades, provoca duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem a ensina como por parte de quem a aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento extremamente importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados obtidos pelos estudantes em relação a sua aprendizagem. Ampliando esse debate, abordamos nesta unidade aspectos relativos à função da Matemática no Ensino Fundamental e discutimos as principais características do conhecimento matemático, em especial aqueles para além dos necessários para o dia a dia do estudante. Destacamos ainda a função que a Matemática desempenha na formação básica do cidadão e o papel do trabalho docente nessa área do conhecimento. Nossa preocupação centra-se na defesa de que os estudantes sejam matematicamente educados, que compreendam os conteúdos considerados essenciais não só para o entendimento da Matemática escolar, mas também para a compreensão de outras ciências, da própria vida diária e do mundo do trabalho que, atualmente, utiliza cada vez mais a Matemática.

2.2 Problematizando o tema

Qual a importância da Matemática na construção da cidadania? A Matemática contribuiu na democratização? A Matemática é uma ciência pronta, acabada e exata? A Matemática é um amontoado de cálculos e fórmulas que devem ser decorados? O ensino de Matemática independe do contexto de quem aprende? Para aprender matemática precisa ter "dom"?

Nesta unidade aprofundaremos tais questões.

2.3 Introdução

> *Eu passei a acreditar que o ensino de matemática, assim como o ensino de qualquer outro assunto nas escolas, é uma atividade "política". Este ensino ajuda, de um lado, a criar atitudes e modelos intelectuais que, por sua vez, ajudarão o estudante a crescer, desenvolver-se, ser crítico, mais perspectivo e mais envolvido e, assim, tornar-se mais confiante e mais capaz de ir além das estruturas existentes. De outro lado, esse mesmo ensino pode também produzir um estudante passivo, rígido, tímido e alienado. Parece não existir nenhum ponto neutro entre essas duas formas de ensinar* (FASHEH, 1998, p. 26).

A constatação da importância da Matemática apoia-se no fato de que o domínio do conhecimento matemático, especialmente aquele relacionado à escolarização básica, desempenha um papel essencial em nossa vida diária, tem aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento necessário para a aquisição de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na utilização do raciocínio dedutivo pelo estudante.

O processo de ensinar e de aprender Matemática, no ensino fundamental, está ancorado por princípios decorrentes de estudos, pesquisas, práticas e debates desenvolvidos nos últimos anos. São eles:

- A Matemática é um componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar.
- A Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente.
- A Matemática escolar não é algo pronto e acabado, mas a reconstrução e a apropriação de um conhecimento pelo estudante, que se servirá dele para compreender, atuar e transformar sua realidade.
- No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, diagramas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com conceitos, princípios e procedimentos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando o estudante a *falar* e a *escrever* sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções e a aprender como organizar e tratar dados.
- A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o estudante resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu dia a dia e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.
- A seleção e a organização de conteúdos não devem se fundamentar apenas na lógica interna da Matemática. Deve-se levar em conta sua

relevância social e a contribuição para o desenvolvimento intelectual do estudante. Trata-se de um processo permanente de reconstrução e apropriação.

- O conhecimento matemático deve ser apresentado aos estudantes como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo.
- Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e de aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão e, em última instância, à base da atividade matemática.
- A avaliação é parte do processo de ensino e aprendizagem. Ela incide sobre uma grande variedade de aspectos relativos ao desempenho dos estudantes, como aquisição de conceitos, princípios, domínio de procedimentos e desenvolvimento de atitudes. Mas também devem ser avaliados aspectos como seleção e dimensionamento dos conteúdos, práticas pedagógicas, condições em que se processa o trabalho escolar e as próprias formas de avaliação.

2.4 O conhecimento matemático: principais características

Rocha (2001) afirma que o currículo de Matemática possui uma série de assuntos que não têm vínculo com a vida diária dos estudantes. Isso pode trazer dificuldades para a compreensão pela ausência de contextos que dariam significado aos conteúdos estudados. É claro que não devemos ensinar apenas aqueles conhecimentos necessários ao dia a dia do estudante, pois isso seria impedi-lo de ter acesso a outros conhecimentos. Porém, é preciso partir da realidade do educando, daquilo que tem significado para ele, para então chegarmos à teoria e depois retornarmos à prática a fim de compreendê-la a partir de novos conhecimentos.

Os PCNs afirmam que, mesmo com um conhecimento superficial da Matemática, é possível reconhecer certos traços que a caracterizam: abstração, precisão, rigor lógico, caráter irrefutável de suas conclusões, bem como o extenso campo de suas aplicações. A abstração matemática revela-se no tratamento de relações quantitativas e de formas espaciais, destacando-as das demais propriedades dos objetos. A Matemática move-se quase que exclusivamente no campo dos conceitos abstratos e de suas inter-relações. Para demonstrar suas afirmações, o matemático emprega apenas raciocínios e cálculos.

É certo que os matemáticos também fazem constante uso de modelos e analogias físicas, recorrendo a exemplos bem concretos na descoberta de teoremas e de métodos. Mas os teoremas matemáticos são rigorosamente demonstrados por um raciocínio lógico.

Os resultados matemáticos distinguem-se pela sua precisão e os raciocínios desenvolvem-se num alto grau de detalhes, que os tornam incontestáveis e convincentes.

Mas a vitalidade da Matemática, apesar de seu caráter abstrato, se deve também ao fato de seus conceitos e resultados terem origem no mundo real e encontrarem muitas aplicações em outras ciências e em inúmeros aspectos práticos da vida diária: na indústria, no comércio e na área tecnológica, entre outros. Por outro lado, ciências como a Física, a Química e a Astronomia têm na Matemática uma ferramenta essencial.

Em outras áreas do conhecimento, como na Sociologia, na Psicologia, na Antropologia, na Medicina e na Economia Política, embora seu uso seja menor que nas chamadas ciências exatas, ela também constitui um subsídio importante, em razão de conceitos, procedimentos, linguagem e atitudes que ajuda a desenvolver.

Não obstante as investigações no campo da Matemática se situem ora dentro do campo da chamada Matemática pura, ora dentro da chamada Matemática aplicada, elas se influenciam mutuamente. Dessa forma, descobertas dos chamados "matemáticos puros" revelam mais tarde um valor prático inesperado, assim como o estudo de propriedades matemáticas em acontecimentos particulares leva, muitas vezes, ao chamado conhecimento matemático teórico.

Se as matemáticas pura e aplicada não se contrapõem, também a característica de exatidão não diminui a importância de teorias como a das probabilidades, nem de procedimentos que envolvem a estimativa e a aproximação.

O conhecimento matemático é o resultado de um processo em que a imaginação, os contraexemplos, as conjecturas, as críticas, os erros e os acertos são parte. Mas tal resultado é apresentado de forma descontextualizada, atemporal e geral, porque é preocupação do matemático comunicar resultados e não o processo pelo qual os produziu. No entanto, muito provavelmente, o processo de produção do conhecimento matemático interessa aos educadores matemáticos.

A Matemática desenvolve-se, deste modo, mediante um processo interativo entre muitos elementos contrastantes: o concreto e o abstrato, o particular e o geral, o formal e o informal, o finito e o infinito, o discreto e o contínuo. É curioso notar que tais interações encontram-se também no âmbito do processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina.

2.5 A função da Matemática no Ensino Fundamental

Ainda para os PCNs, a Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Faz parte da vida de todas as pessoas nas experiências mais simples, como contar, comparar e operar sobre quantidades, fazer cálculos relativos a salários, pagamentos e consumo. Na organização de atividades como a agricultura e a pecuária, a Matemática se apresenta como um conhecimento de muita aplicabilidade.

Essa potencialidade do conhecimento matemático deve ser explorada, da forma mais ampla possível, no ensino fundamental.

2.6 A Matemática e a construção da cidadania

A função que a Matemática desempenha na formação básica do cidadão deve fundamentar o trabalho docente com essa área do conhecimento. Falar em formação básica para a cidadania significa falar da inserção das pessoas no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura no âmbito da sociedade brasileira.

A diversidade sociocultural existente no Brasil, que dá origem a diferentes modos de vida, valores, crenças e conhecimentos, apresenta-se para a educação matemática como um desafio a ser considerado.

Os estudantes trazem para a escola conhecimentos, ideias e intuições que são constituídos por meio de experiências que eles vivenciam em seu grupo. Eles chegam à sala de aula com diferentes ferramentas básicas para, por exemplo, classificar, ordenar, quantificar e medir. Além disso, aprendem a atuar de acordo com os recursos, as dependências e as restrições de seu meio.

Junto com esses esquemas de pensamentos e práticas, todo estudante brasileiro faz parte de uma sociedade em que se fala a mesma língua, se utiliza o mesmo sistema de numeração, o mesmo sistema de medidas, o mesmo sistema monetário e, além disso, se recebe informações veiculadas por meio de mídias abrangentes que utilizam linguagens e recursos gráficos comuns, independentemente das características particulares dos grupos receptores.

Desse modo, um currículo de Matemática deve procurar contribuir, de um lado, para a valorização da pluralidade sociocultural, impedindo o processo de submissão no confronto com outras culturas; de outro, criar condições para que o estudante supere um modo de vida restrito a um determinado espaço social e se torne ativo na transformação de seu ambiente.

A compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais também dependem da leitura e da interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania, é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar estatisticamente informações, etc.

Para Severino (1994), o homem só é plenamente cidadão se puder efetivamente usufruir dos bens materiais necessários para a sustentação de sua existência física, dos bens simbólicos para sua existência subjetiva e dos bens políticos para sua existência social. Para ele, a escola não pode garantir a cidadania porque não se forma um cidadão, se é cidadão. Contudo, adverte o autor, a escola pode fornecer os instrumentos que possibilitarão ao homem a luta por uma sociedade cidadã.

Cidadania tem tudo a ver com a capacidade de lidar com situações novas. Lidamos com situações conhecidas e rotineiras a partir de regras que são memorizadas e obedecidas. Mas o grande desafio está em tomar decisões sobre situações imprevistas e inesperadas, que atualmente são cada vez mais frequentes. A tomada de decisões exige criatividade e ética e a Matemática é um instrumental importantíssimo para a tomada de decisões, pois ela apela para a criatividade e, ao mesmo tempo, também fornece os instrumentos necessários para uma avaliação das consequências da decisão escolhida. A essência do comportamento ético resulta do conhecimento das consequências das decisões que tomamos.

Para tanto, o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho colaborativo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios.

O ensino da Matemática deve desenvolver e aperfeiçoar a criticidade e a criatividade nos educandos. Entendemos nesse contexto que a criticidade é a capacidade de analisar uma situação e tirar conclusões apropriadas e corretas de dados obtidos. Isso inclui determinar dados inconsistentes ou ocultos e informações irrelevantes. Já a criatividade é a capacidade em construir uma solução para uma situação-problema. Além disso, é a capacidade de gerar, sintetizar e aplicar ideias originais para criar um produto complexo.

2.7 O aprendizado matemático

> *Não deveria existir oposição entre a criatividade e a aprendizagem de rotinas, como se a primeira pudesse ser desenvolvida sem a segunda* (CRATO, 2006, p. 83).

Existe uma série de teorias psicológicas que procuram explicar sobre como nós aprendemos e, em especial, como aprendemos Matemática. Tais teorias podem trazer implicações tanto para o trabalho docente como para interpretações de facilidades e de dificuldades dos estudantes em seu aprendizado de determinados conteúdos escolares e, em particular, aqueles envolvendo o conhecimento matemático.

Devemos ressaltar que, em relação ao trabalho docente, a adoção de uma teoria sobre a aprendizagem implica na adoção de procedimentos metodológicos coerentes com os pressupostos dessa teoria.

Entretanto, questionamos a adoção de uma única teoria psicológica sobre a aprendizagem em função da complexidade do trabalho docente, que deve articular os mais diversos elementos presentes no fenômeno educacional.

Concordamos com Van de Walle (2009) que, independentemente da teoria e das teorias sobre a aprendizagem e, em especial, sobre a aprendizagem matemática que o professor utiliza para fundamentar seu trabalho em sala de aula, algumas ideias sobre como aprendemos parecem presentes entre pesquisas sobre o assunto. São elas:

a) As crianças elaboram, adquirem e validam conhecimentos, assim como dão sentido a eles.

Não podemos transmitir conhecimentos para as crianças como se elas fossem recipientes vazios. Elas chegam às salas de aula com muitas ideias sobre a realidade que as cerca e cabe ao professor, por meio de atividades didáticas, reconhecer a validade desse conhecimento mais intuitivo, para refutar aquilo que não serve assim como, a partir daquilo que é válido, caminhar em direção ao conhecimento.

Em outras palavras, os estudantes adquirem pela experiência, cultura e senso comum um conjunto de conhecimentos intuitivos relacionados a conceitos, princípios e procedimentos que serão ensinados na escola.

Entretanto, a intervenção do professor é fundamental. É ele quem tem a função de organizar a caminhada do estudante, criando situações conflitantes, fornecendo informações que permitam a reelaboração dos conhecimentos intuitivos, propondo articulações entre os conteúdos para organizá-los em um corpo de conhecimentos sistematizados.

b) A compreensão é própria de cada estudante.

De início, entendemos que compreensões não são tarefas de tudo ou nada, mas crescem, desenvolvem-se e expandem-se como um conceito que é repetidamente encontrado em diferentes contextos, em diferentes níveis de abstrações e generalizações. Então, a compreensão é um processo. Assim, em muitas oportunidades, é preciso dar tempo às crianças para que elas assimilem um conhecimento novo. Na maioria das vezes, um novo aprendizado exige uma reorganização de nossas ideias anteriores. Além disso, o conjunto de ideias de uma criança é diferente do conjunto de outra criança e, cada uma, também, possui o seu tempo de aprendizagem. Cabe ao professor, pois, respeitar esse tempo, visando sempre assegurar o avanço intelectual da criança sobre determinado conhecimento.

c) A metacognição é um elemento importantíssimo no processo de aprendizagem.

Refletir sobre o pensamento é um momento essencial para o pleno aprendizado de ideias e aspectos do conhecimento científico. Nos trabalhos colaborativos entre os estudantes, esse aspecto da aprendizagem é plenamente satisfeito uma vez que os aprendizes debatem e trocam ideias assim como um deles pode contar aos demais o raciocínio que empregou na solução de um problema. Já os trabalhos individuais deveriam contemplar momentos que o estudante pudesse contar ao professor ou à classe como pensou a resolução de um problema. Sabemos que ensinar é a melhor maneira de aprender e isso se deve, provavelmente, porque estamos pensando e expondo aquilo que pensamos.

d) A interação sociocultural contribui para o desenvolvimento e ampliação de ideias matemáticas entre os estudantes.

Embora aprender seja um processo reflexivo e interno, os estudantes podem testar e modificar ideias, desenvolvendo assim novas ideias a partir da interação com os outros estudantes e com o professor. Quando pensamos sozinhos sobre uma situação-problema temos apenas o nosso ponto de vista. Na interação social temos outros pontos de vista que podem ser considerados e o entendimento de um dado problema pode ganhar amplitude, profundidade e generalidade, que são características essenciais do conhecimento científico.

e) A descoberta de padrões para relações matemáticas ajudam os estudantes a investigar e debater sobre elas.

A descoberta de padrões em uma situação-problema permite a análise e discussão de outras relações matemáticas.

Van de Walle (2009) afirma que os padrões não estão apenas em números e formas, mas também ao nosso redor. A realidade está cheia de padrões e de ordem: na natureza, na arte, nas construções, na música. Padrões e ordens são encontrados no comércio, nas indústrias, na medicina, na sociologia. O matemático descobre essa ordem, dá-lhe sentido e a utiliza em uma variedade de maneiras fascinantes, melhorando nossas vidas e ampliando nosso conhecimento. A escola tem de começar a ajudar as crianças com esse processo de descoberta.

f) O ensino com sentido é uma atividade que leva em consideração o estudante.

Para que o estudante tenha compreensão sobre um assunto da Matemática, é necessário que tal assunto tenha um sentido para ele. Quando o estudante pergunta: "para que serve isto?" é bem provável que ele necessite de um contexto em que observe a aplicação daquilo que está sendo estudado. Assim, precisamos estar atentos em relação aos conhecimentos dos estudantes (conceitos e contextos) para que a partir de bons problemas eles consigam explorar e buscar significados nos conteúdos trabalhados. Isso não quer dizer um ensino centrado apenas no estudante, e sim um ensino com o estudante. Devemos lembrar que nem sempre os estudantes, sobretudo as crianças dos primeiros anos do ensino fundamental, fazem questionamentos sobre o que é ensinado em Matemática. Aí está o papel do professor: instigar, questionar e estimular reflexões.

2.7.1 A aprendizagem matemática e o trabalho docente

A partir das ideias discutidas e das contribuições de Fremont (1979) é possível elencar alguns princípios que poderiam ser seguidos pelos professores de Matemática em seus trabalhos. São eles:

a) O processo da aprendizagem de uma ideia matemática mostra que essa aprendizagem deve evoluir a partir de um envolvimento ativo com objetos concretos (reais ou imagináveis) até as análises, as sínteses, as sistematizações, as generalizações, as abstrações e as formalizações.

b) Durante todo esse processo, o estudante deve estar livre para pensar e tirar suas próprias conclusões.

c) O pensamento lógico-dedutivo deve ser precedido de oportunidades para ideias intuitivas, imaginativas, criativas, originais, para palpites, tentativas e erros, bem como experimentações.

d) Um estudante, em geral, é capaz de abstrair uma noção ou um princípio matemático depois de confrontado com uma série de situações às quais a dada noção ou o dado princípio são inerentes.

e) Imagens visuais são indispensáveis para que o estudante possa compreender e utilizar noções, princípios e procedimentos matemáticos.

f) A representação matemática (símbolos, signos, figuras e vocabulário) deve ser precedida pela fala, por gestos, por modelos físicos assim como pelas mais diversas formas de expressão pictórica (desenhos, esquemas, diagramas).

Cabe ressaltarmos, mais uma vez, a função do professor no processo de ensino-aprendizagem. É ele quem deve, por meio das mais diversas atividades desenvolvidas pelos estudantes, organizar, sintetizar e sistematizar os conteúdos matemáticos.

2.8 Considerações sobre o aprendizado da matemática

Ainda em relação ao aprendizado da Matemática, três considerações poderiam ser feitas na perspectiva do ensino dessa ciência.

A primeira consideração refere-se a duas características que distinguem a Matemática dos outros conteúdos escolares. O seu estudo é sequencial e o não domínio de um assunto pode comprometer seriamente a compreensão de um assunto posterior. Por exemplo, não saber aspectos da adição, subtração e multiplicação pode comprometer a compreensão da divisão. A outra característica é que as crianças precisam entender os conceitos matemáticos desde pequenas. Por exemplo, para compreender a contagem dos números naturais as crianças necessitam ter o entendimento das propriedades do sistema de numeração decimal. Só assim elas avançarão na compreensão da Matemática. Quando elas contam dez, onze, doze e assim por diante, precisam ter consciência do que está acontecendo em termos de relações matemáticas, ou seja, a partir do número dez a ideia de agrupamento aparece na contagem dos números.

A segunda consideração refere-se à essência que permite o domínio do conhecimento matemático, ou seja, a articulação compreensiva entre as ideias matemáticas e os algoritmos (sequência de passos necessários para a realização de uma tarefa). Quando o professor trabalha uma regra, uma fórmula, uma técnica, é importante que esses algoritmos tenham sido plenamente justificados. Os algoritmos são estruturas matemáticas que se fundamentam em propriedades relacionadas aos conteúdos matemáticos e assim eles precisam ser compreendidos. Por exemplo, quando dividimos dois números naturais existe um algoritmo que pode tornar mais fácil e mais rápido o cálculo.

A terceira consideração refere-se a aspectos do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, aprendizado de fatos fundamentais e rotinas, aspectos muito criticados, mas é necessário rever algumas dessas críticas. Fatos fundamentais como as tabuadas são importantes nos cálculos matemáticos e o seu domínio não se contrapõe, por exemplo, à criatividade.

Julgamos que o ensino da Matemática não precisa de reformulações radicais ou revolucionárias para que o aprendizado dessa disciplina se apresente em um bom nível. Vivenciando o fazer matemática, os estudantes teriam grandes possibilidades de aprender o conhecimento matemático. E esse fazer matemática comporta palpite, experimentação, intuição, imaginação, criatividade e até mesmo equívoco e engano.

2.9 Estudos complementares

O *Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil*, especialmente na parte de Matemática, é uma importante leitura complementar, visto que discute como a matemática pode ser abordada na infância e sugere como ela pode ser inserida nas atividades rotineiras realizadas com as crianças para que elas possam pensar por conta própria e aprender a tomar decisões.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática (BRASIL, 1997) também são indicações de leituras complementares para estudo, pois poderão contribuir na nossa compreensão de que fazer matemática é expor ideias próprias, escutar as dos outros, formular e comunicar procedimentos de resolução de problemas.

UNIDADE 3

Conteúdos matemáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental: enfoques teóricos e metodológicos

3.1 Primeiras palavras

Assim como as palavras, os números também permeiam a nossa vida diária, assumindo significados diferentes em contextos distintos, por exemplo, código, identificador, localizador. No entanto, para a Matemática, os números, em especial os números naturais, têm um significado próprio. No contexto matemático, o número natural está relacionado à ideia de quantidade, e essa noção é uma construção da mente humana.

Esperemos que as discussões desta unidade permitam aos professores que ensinam Matemática compreenderem teoricamente esse importante conceito matemático e, como consequência, que possam construir atividades as quais permitam que as crianças adquiram tal conceito.

3.2 Problematizando o tema

Para que servem os números? Contar ou escrever números garantem a sua compreensão?

3.3 Introdução

Para Santos (2002), se atentarmos para o que ocorre na prática diária em sala de aula de Matemática observaremos que as ações docentes são originadas por um conjunto de crenças, concepções e conhecimentos que cada professor foi desenvolvendo e adquirindo ao longo de sua vida, durante o curso que o formou e, mais intensamente, no seu percurso profissional desde que se tornou professor. Essas crenças, concepções e conhecimentos dão base para o que se pode chamar de “projeto curricular pessoal”.

Muitos são os fatores que ajudam a compor esse projeto:

- os conhecimentos adquiridos em diferentes cursos de formação (inicial e continuada);
- a inter-relação com outros professores;
- o contato com as tecnologias de informação e comunicação;
- as leituras de diferentes materiais (revistas, livros didáticos e paradidáticos, currículos oficiais, etc.);
- a participação em eventos envolvendo a educação matemática;
- o trabalho diário em salas de aula, onde os professores se relacionam com os estudantes e procuram desenvolver atividades que envolvam a ciência matemática.

A partir desses elementos podemos partir do pressuposto que a formação inicial de professores que ensinam Matemática é condição necessária para que eles tenham condições de desenvolver trabalhos diferenciados com o conhecimento matemático na perspectiva de os estudantes apropriarem-se significativamente de conceitos, princípios e procedimentos matemáticos.

Em um primeiro momento dessa formação, os aspectos teóricos dos conteúdos matemáticos devem ser apreendidos para que em seguida caminhos metodológicos sejam elaborados, trabalhados, analisados e avaliados nas práticas docentes. Quando temos bem claro o problema que originou um determinado conteúdo, quais são seus conceitos principais, suas propriedades e suas aplicações, a metodologia de ensino já está bem encaminhada.

Há de se considerar, no entanto, os aprendizes em seu desenvolvimento psicológico assim como o nível de profundidade que se quer trabalhar o assunto, mas o domínio teórico do conhecimento matemático é decisivo para o trabalho docente.

Os documentos oficiais, em geral, trazem considerações de diferentes naturezas sobre a Matemática, sobre os objetivos do seu ensino, sobre os conteúdos a ser trabalhados e sobre a maneira como tais conteúdos devem ser trabalhados e avaliados.

Entre os documentos oficiais elaborados nos últimos anos, destacamos os Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática (BRASIL,1997), que propõem para o ensino fundamental a seguinte lista de conteúdos:

- números e operações;
- espaço e forma;
- grandezas e medidas;
- tratamento da informação.

Neste estudo, procuraremos discutir esses conteúdos em aspectos teóricos e metodológicos com a finalidade de destacar elementos conceituais essenciais assim como possíveis repercussões para o trabalho docente com a Matemática na perspectiva de uma aprendizagem efetiva dessa importante área do conhecimento.

Entretanto, antes de discutirmos os conteúdos matemáticos propostos para o ensino fundamental, consideramos que um aspecto seria necessário retomar, qual seja, a natureza própria da Matemática. A justificativa deve-se ao fato de que toda ciência apresenta para seu estudo tanto um corpo de conhecimento quanto uma natureza peculiar. Nesse sentido, primeiramente seria importante explicitar a natureza do conhecimento matemático para que nossos estudantes aprendessem tanto os assuntos da Matemática quanto a sua especificidade, ou seja, aquilo que é característico dessa disciplina.

3.4 Os três tipos de conhecimento segundo Piaget

Kamii (1986) afirma que para Piaget existem três tipos de conhecimento: o social (convencional), o físico (empírico) e o lógico-matemático.

Conhecimento social é o conhecimento cujas fontes primárias são convenções desenvolvidas pelas pessoas. São exemplos de conhecimento social: o Natal, comemorado em 25 de dezembro, a árvore ser chamada “árvore”, e que não devemos andar sobre mesas. A principal característica do conhecimento social é sua natureza geralmente arbitrária. Segue-se daí que, para a criança adquirir conhecimento social, sua convivência com pessoas é indispensável.

Conhecimento físico é o conhecimento dos entes ou objetos da realidade externa. A cor e o peso são exemplos de propriedades que estão nos objetos da realidade externa, podendo ser percebidas empiricamente por meio da observação e da experimentação. Assim, saber que um objeto vai cair em direção ao centro da Terra quando o largamos de uma determinada altura é também um exemplo de conhecimento físico.

Conhecimento lógico-matemático é o conhecimento que consiste em relações criadas por cada indivíduo. Quando nos apresentam uma rosa branca e uma rosa vermelha e pensamos que elas são “diferentes”, essa diferença é um exemplo de conhecimento lógico-matemático. Embora utilizemos objetos do mundo físico, a relação “diferente” não está nas rosas, mas sim na nossa mente. As rosas são observáveis, mas a diferença entre elas não. A diferença é uma relação criada mentalmente por cada pessoa que coloca dois objetos nessa relação. A diferença não está na rosa branca nem na rosa vermelha, e se uma pessoa não coloca os objetos nessa relação a diferença não existe para ela.

Outros exemplos de relações que os indivíduos podem construir mentalmente entre objetos são, por exemplo, “similares”, “de mesmo peso” e “duas”. É tão correto afirmar que as rosas brancas e as rosas vermelhas são “similares” quanto afirmar que elas são “diferentes”. A relação estabelecida entre os objetos depende de cada indivíduo. Se a pessoa pretende comparar o peso das duas rosas, provavelmente dirá que elas são “iguais” (em peso). Se, no entanto, a pessoa pretende pensar em termos numéricos, dirá que existem “duas”. As duas rosas são observáveis, mas a propriedade de serem duas não. O número é uma relação criada mentalmente por cada indivíduo.

Em resumo, podemos considerar a Matemática uma ciência de segunda ordem, ou seja, ela se utiliza dos objetos do mundo físico para construir relações, mas essas relações não estão nas propriedades físicas dos objetos. São relações abstratas, invisíveis. Cabe ressaltar que os matemáticos também inventam relações abstratas sem levar em conta a realidade, caracterizando os modelos formais.

3.5 A noção de número natural

Observemos os seguintes conjuntos: A = {x, x, x, x, x, x, x}, B = {#, #, #, #, #, #, #} e C = {♠, ♠, ♠, ♠, ♠, ♠, ♠}. O que eles têm em comum? Uma relação que podemos construir mentalmente é que tais conjuntos têm em comum a mesma quantidade de elementos. Na língua portuguesa essa quantidade é chamada de "sete". Assim, sete é um número. Uma relação que é construída usando-se os conjuntos dados, mas que não está nos conjuntos enquanto uma realidade física. A mesma quantidade ou mesmo número de elementos não está nos conjuntos, mas na relação mental que criamos a partir desses mesmos conjuntos.

Em outro exemplo poderíamos tomar os conjuntos dias da semana, cores do arco-íris, notas musicais e verificarmos que mesmo sendo tais conjuntos formados por objetos de naturezas bem distintas a quantidade de elementos é a mesma.

Então, número é uma relação construída a partir da interação com objetos do mundo físico, mas tal relação não tem existência na realidade externa. Ela é uma relação construída na nossa mente. Assim, número é um conhecimento lógico-matemático que não pode ser ensinado diretamente à criança, pois ela tem que construí-lo por si mesma.

É claro que o professor pode propor atividades aos estudantes para levá-los a pensar ativamente (relacionar objetos), estimulando assim o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático.

3.6 As crianças e a construção de escritas numéricas

O trabalho docente com os números naturais deve dar conta de responder as seguintes questões: para que servem os números naturais? Que funções eles desempenham? No entanto, a situação-problema que podemos propor às crianças poderia ser algo do tipo: como podemos contar um *montão* de objetos? É essa questão bem simples que pode mostrar a elas a necessidade do número natural. As quantidades pequenas, podemos diferenciá-las apenas pela percepção, mas quando as quantidades são maiores necessitamos de outros critérios para compará-las.

As primeiras ideias de número natural devem ter sido expressas por caçadores contando as quantidades de suas caças: tantos animais quanto as asas de um pássaro ou tantos animais quanto os dedos de uma mão.

Assim, um primeiro aspecto envolvendo a noção de número natural está associado à ideia de quantidade. Por exemplo, a noção de cinco pode ser expressa por uma mão, pois esta contém cinco dedos, ou por um pentágono, o qual possui cinco lados. Se tomarmos uma mão para exemplificar o número cinco, ao contarmos essa quantidade com os dedos o número cinco não é nem o dedinho e nem o dedão, mas sim todos os dedos da mão.

Com o desenvolvimento da humanidade, as quantidades ficaram maiores e assim o homem precisou desenvolver outro aspecto essencial para as contagens: a ideia de agrupamentos. Grupos de quantidades receberam nome ou símbolos específicos. Como temos dez dedos nas mãos e dez nos pés, os grupos de 10, 100, 1.000, e assim por diante, acabaram prevalecendo na construção de um sistema numérico. Nesse sentido, as ideias de quantidade e de grupos de quantidades são essenciais para a compreensão da noção de número natural.

Estudos sobre como as crianças se aproximam do sistema de numeração servem de base à proposição de situações didáticas que ofereçam a elas oportunidades de colocar em jogo suas próprias hipóteses e compará-las com as de outras crianças; possibilitando assim elaborar argumentos, descobrir contradições e detectar erros.

Zunino (1995) e Fayol (1996) têm algumas hipóteses a respeito do que as crianças pensam sobre o sistema de numeração, quais sejam:

Tamanho da escrita

As crianças são capazes de indicar qual é o maior número de uma lista mesmo sem conhecer as regras do sistema de numeração decimal. Observam a quantidade de algarismos presentes em sua escrita e, quase sempre, afirmam, por exemplo, que o número 123 é maior que o número 45 porque tem mais números. As crianças pensam que, “quanto maior é a quantidade de algarismos de um número, maior é esse número”. Essa hipótese de comparação funciona mesmo quando a criança não conhece “o nome” dos números que está comparando. É uma hipótese que ela elabora com base na interação da numeração escrita.

O primeiro é o que manda

Ao comparar números como 28 e 45, as crianças afirmam que o número 45 é maior porque o 4, primeiro na escrita desse número, é maior que o 2, que vem primeiro na escrita do outro. Porém, ainda não percebem que “o primeiro é quem manda” porque representa agrupamentos de 10. Embora as crianças não conheçam as regras de agrupamentos e trocas, elas identificam que a posição do algarismo no número cumpre sempre um papel importante no nosso sistema de numeração, isto é, o valor de um algarismo na escrita depende do lugar em que está localizado em relação aos outros algarismos.

Escrita associada à fala

Alguns estudantes recorrem à justaposição de escritas para escrever números, organizando-a de acordo com a fala. Assim, em muitas oportunidades, para representar o número 245, podem escrever: 200 40 5.

As crianças dizem que "escrevem da maneira como a professora falou".

Quando a criança faz a escrita numérica em correspondência com a numeração falada, escreve os números de forma não convencional, por exemplo: 106 como dezesseis, e 2007 como duzentos e sete.

Essa última hipótese pode levá-las a contradições e é exatamente explorando essas contradições que o professor pode ajudá-las a construir progressivamente escritas convencionais e com significado.

Zunino & Sadovsky (1996) afirmam também que a apropriação da escrita convencional dos números não segue a ordem da série numérica, pois as crianças manipulam primeiramente as centenas, dezenas e unidades, elaborando só depois a escrita dos números que se posicionam nos intervalos.

3.7 Atividades que o professor pode propor às crianças para identificar os conhecimentos que elas têm sobre os números

As atividades propostas pelos professores devem atender o nível de desenvolvimento das crianças assim como os aspectos matemáticos que o professor pretende trabalhar e que envolvem os números naturais. Exemplos de algumas delas:

a) até quanto (número) você é capaz de pular corda;

b) peça aos estudantes que recortem números em jornais e revistas e façam a leitura deles (do jeito que sabem);

c) elabore, com a classe, listas com números de linhas de ônibus da cidade, números de telefones úteis, números de placas de carros e solicite a leitura deles;

d) oriente os estudantes a anotarem os números referentes a eles próprios: data de nascimento, idade, número do calçado, peso, altura, número de irmãos, número de amigos;

e) utilize diariamente o calendário;

f) solicite que o estudante mostre um número em uma máquina de calcular, seja escrevendo na lousa ou lendo;

e) peça aos estudantes para observarem a numeração da rua onde moram (em que número começa e em que número termina) e o número de suas casas e de seus vizinhos;

f) verifique como as crianças fazem a contagem e a leitura com dois ou mais dígitos e que hipóteses possuem acerca da escrita desses números.

3.8 Algumas considerações

Nesta unidade, ressaltamos que as crianças utilizam os números em diversas atividades da vida diária, mas isso pode não significar um conhecimento lógico-matemático. O número natural é uma relação mental construída pelo indivíduo na interação com o mundo físico e cabe aos professores desenvolver atividades que permitam que as crianças construam internamente essa relação. Escrever ou contar oralmente sequências de números não garantem a compreensão dessa importante noção no âmbito da Matemática.

3.9 Estudos complementares

O livro *A criança e o número*, citado nas referências, pode ampliar e aprofundar discussões sobre a ideia de número do ponto de vista matemático, bem como trazer importantes sugestões para o trabalho do professor.

Outra obra tanto para a formação quanto para a atuação docente é a de Ana Cristina Souza Rangel, *Educação Matemática e a construção do número pela criança*, da Editora Artes Médicas.

UNIDADE 4

O sistema de numeração decimal
e as operações fundamentais

4.1 Primeiras palavras

Nesta unidade, conteúdos matemáticos dos anos iniciais do ensino fundamental são abordados em seus aspectos conceituais, pretendendo com isso possíveis repercussões metodológicas tanto na Educação Infantil quanto nos primeiros anos da escolarização matemática.

Enfatizamos que as discussões teóricas e metodológicas dos conteúdos matemáticos têm como perspectiva a formação dos professores que ensinam Matemática visando a trabalhos docentes significativos para os estudantes.

A noção de número natural, as propriedades do sistema de numeração decimal, uma abordagem tanto qualitativa quanto quantitativa das operações fundamentais e a primeira ampliação dos conjuntos numéricos (frações) são as temáticas que desenvolveremos nesta unidade.

4.2 Problematizando o tema

O nosso sistema de numeração parece perfeito, pois com dez signos podemos escrever qualquer número e realizar operações. Como isso foi possível?

Ensinar os números naturais para as crianças é uma tarefa fácil? Qual o ponto de partida?

4.3 Compreendendo o nosso sistema de numeração

Estudos da História da Matemática mostram que diferentes civilizações construíram distintas formas de representar o resultado de contagens e medições. Diversos símbolos, signos e regras foram criados por egípcios, babilônios, maias, romanos, etc. Conhecê-los é importante para a compreensão do processo de construção do conhecimento matemático e, em particular, das regras do Sistema de Numeração Decimal (SND).

Podemos afirmar que o sistema de numeração atual é uma síntese dos mais variados sistemas de numeração que a humanidade criou. Ele se mostrou mais interessante do que os outros, pois com dez signos e algumas regras podemos escrever qualquer número e realizar operações.

O nosso sistema de numeração tem características que precisam ser explicitadas para facilitar a sua compreensão. São elas:

- A base é dez (decimal). Nosso sistema de numeração tem 10 signos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0.

- Tem o zero, que é um signo representante da ausência de quantidade. É uma contribuição dos hindus no sistema de numeração e sua utilização é recente.
- É posicional (por exemplo, 222 – o primeiro dois é duzentos, o segundo é vinte e o terceiro é dois). Para representar cada quantidade, nossos antepassados criavam novos signos. No entanto, nosso sistema de numeração decimal tem uma propriedade, a posição indica a quantidade de elementos daquele agrupamento. Da direita para a esquerda temos as unidades, as dezenas, as centenas e assim por diante. Cada três ordens forma uma classe. Assim o número 222 tem duas centenas, duas dezenas e duas unidades. Cabe ressaltar que esta é uma leitura em termos das quantidades de todos os agrupamentos que esse número possui, mas 222 também pode ser decomposto em 22 dezenas e duas unidades assim como 222 unidades. Com o zero e o valor posicional foi possível passar para o papel a lógica que estava nos ábacos.
- É aditivo ($245 = 200 + 40 + 5$).
- É multiplicativo ($245 = 2 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$).

Quando começamos o trabalho com a Aritmética nas séries iniciais do Ensino Fundamental, o trabalho docente com a Matemática deve ser feito de maneira que a parte conceitual fique bem fundamentada. O fato de uma criança falar ou mesmo escrever os números não significa plena compreensão dessa importante noção matemática.

Assim, poderíamos começar com os números de 1 a 9, para em seguida trabalharmos com o zero (ausência de quantidade). De 1 a 9, a ideia essencial é associarmos os números às quantidades. No entanto, quando passamos para os números 10, 11, 12,..., além de quantidades há também a ideia de agrupamento. Nesse caso, a nossa língua não ajuda muito, pois 11, 12, 13, 14 e 15 não explicitam as quantidades dez-e-um, dez-e-dois, dez-e-três, dez-e-quatro e dez-e-cinco. Já o número dezesseis dá a entender um grupo de dez unidades mais seis unidades. Isso ocorre com outros números também, como dezessete, dezoito e dezenove, pois, decompondo-os, temos: dez-e-sete, dez-e-oito e dez-e-nove.

Devemos também ressaltar que do ponto de vista matemático a ideia de número é a síntese de duas relações lógicas: a classificação e a seriação. A classificação é o aspecto cardinal do número, ou seja, os objetos de um conjunto podem ter uma propriedade característica comum e, assim, considerando-se cada objeto individualmente como uma unidade podemos expressar a quantidade desses objetos no conjunto. Em outras palavras, classificar é o ato de separar em categorias de acordo com semelhanças ou diferenças. A seriação é o aspecto ordinal do número. Ordenamos objetos de um conjunto para que possamos contá-los sem deixar de contar algum deles ou contá-lo mais de uma vez. No entanto, é essencial ressaltarmos que a seriação na contagem dos números naturais tem ainda outro aspecto importante. Por exemplo, o número quatro contém o número três mais o número um, ou dois mais um mais um, ou um mais um mais um mais um. Então: $4 = 3 + 1 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$. Assim, para quantificar os objetos como um conjunto, a criança tem que colocá-los em uma relação de inclusão hierárquica. Isso significa que a criança deve incluir mentalmente um em dois, dois em três, três em quatro, etc.

Temos também que os números podem ser usados como um código: telefones, documentos, identificações. Então, as crianças falam ou escrevem números como códigos, e esse conhecimento do dia a dia nem sempre ajuda na compreensão das ideias de número e de sistemas de numeração.

4.4 Os conceitos envolvendo as quatro operações fundamentais

A literatura em educação matemática tem destacado a necessidade de se enfatizar, por meio de metodologias diferenciadas, os conceitos matemáticos, sobrepondo-se às regras e técnicas que são memorizadas e, por muitos, esquecidas. Devemos ressaltar que não é para se abandonar regras e técnicas e nem mesmo a memória. No entanto, tais aspectos envolvendo o aprendizado da Matemática só têm sentido se forem articulados aos conceitos e princípios matemáticos.

Pensando nessas ideias e relacionando-as com as quatro operações fundamentais da Aritmética, inferimos que é necessário refletir sobre o conceito de número e das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Para Onuchic & Botta (1998), a Aritmética é a parte da Matemática que trabalha sobre números, estabelecendo relações, definindo operações e identificando propriedades. Para as autoras, a natureza do número, em suas diferentes operações, muda quando deixamos de adicionar e subtrair para multiplicar e dividir os números naturais. E muda, ainda mais, quando passamos, por exemplo, das operações com os números naturais para as operações com os números fracionários.

4.4.1 As operações fundamentais

No contexto matemático, uma operação tem as seguintes características: é uma ação mental, reversível e que tem propriedades.

As quatro operações fundamentais, até há pouco tempo, refletiam as ideias de adição (processo de juntar coisas de mesma natureza), subtração (a operação inversa da adição, ou seja, a ideia de tirar uma quantidade de outra), multiplicação (o processo de adicionar, repetidamente, parcelas iguais) e divisão (a ideia de reconhecer quantas vezes alguma coisa cabe em outra).

Numa visão mais recente sobre as quatro operações fundamentais com os números naturais, observamos que: a) cada operação fundamental da Aritmética geralmente permanece ligada a um modelo primitivo, intuitivo, implícito e inconsciente; b) as ideias subjacentes a essas operações não são tão simples, são complexas; e c) há diferentes tipos de problemas que são resolvidos por uma mesma operação.

Nesse sentido, algumas recomendações já poderiam ser feitas para o trabalho com as operações fundamentais nos números naturais. Por exemplo: a) as operações adição e subtração, assim como as operações multiplicação e divisão, deveriam ser trabalhadas simultaneamente; b) há uma distinção entre a situação-problema e o procedimento de achar a sua solução; e c) as crianças raciocinam melhor nas ações do que nas representações.

Os problemas de adição podem estar relacionados, por exemplo, às ideias de "mudar adicionando", de "combinar fisicamente" e de "combinar conceitualmente". Os problemas de subtração podem apresentar três ideias diferentes: o "mudar subtraindo – tirar", o "igualar ou completar" e o "comparar". Os problemas de multiplicação podem ser gerados a partir de "grupos iguais", de "comparação multiplicativa", de "produto cartesiano" e de "área". Por fim, os problemas de divisão modelam tipos distintos de divisão: A "divisão partitiva – repartir igualmente", a "divisão quotitiva – medida" e a "divisão cartesiana". Toda esta complexidade de ideias pode gerar dificuldades para a plena compreensão, por parte das crianças, dos conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão, pois situações-problema com ideias operatórias diferentes são resolvidas por um mesmo algoritmo.

As operações de adição e subtração deveriam ser trabalhadas a partir de "problemas aditivos e subtrativos" que permitissem desenvolver, simultaneamente, os conceitos de adição e subtração. Esse trabalho deveria ser feito juntamente com o trabalho da construção do significado dos números naturais. A seguir, é que se deveria relacionar os símbolos aos conceitos de adição e subtração. Assim, os problemas aditivos e subtrativos seriam entendidos como elementos de uma mesma estrutura e não poderiam ser trabalhados separadamente.

A adição é uma operação que produz uma soma a partir de duas parcelas conhecidas, e a subtração é uma operação que produz uma das parcelas a partir de uma soma conhecida e da outra parcela também conhecida. Assim, duas dessas quatro situações são aditivas (combinar e adicionar) enquanto as outras duas são subtrativas (tirar, comparar e completar).

Exemplifiquemos algumas situações-problema categorizadas por Gerard Vergnaud e resumidas por Pires (2002) que envolvem as estruturas aditivas que expressam as operações adição e subtração.

Problemas de combinação

São aqueles em que duas partes são combinadas para se obter uma soma ou um total.

1. Em uma fruteira há 5 laranjas e 8 bananas. Quantas frutas há nessa fruteira? (adição – busca da soma ou total).
2. Em uma fruteira há 13 frutas, sendo 5 laranjas e as demais bananas. Quantas são as bananas dessa fruteira? (subtração – busca de uma das partes).

Problemas de transformação

São aqueles em que um estado inicial sofre uma mudança para chegar a um estado final.

1. Pedrinho tinha 10 figurinhas. Ganhou 5 de seu amigo. Com quantas figurinhas ele ficou? (adição – busca do estado final).
2. Pedrinho tinha 10 figurinhas. Ganhou algumas de seu tio e ficou com 15. Quantas figurinhas ele ganhou de seu tio? (subtração – busca da transformação).
3. Pedrinho ganhou 5 figurinhas de seu tio e ficou com 15. Quantas figurinhas ele tinha inicialmente? (subtração – busca do estado inicial).

Problemas de comparação

São aqueles em que se estabelece uma comparação entre dois estados.

1. João tem 15 selos e José tem 10 selos. Quantos selos João tem a mais que José ou quantos selos José tem a menos que João? (subtração – busca da diferença).

Problemas de igualdade

1. Maria tem 8 bonecas. Ana tem 5. Quantas bonecas Ana tem que comprar para ficar com a mesma quantidade de Maria? (subtração – adicionando a diferença).
2. Bianca tem 7 bonecas. Marina tem 3. Quantas bonecas Bianca tem que perder para ficar com o mesmo número de bonecas de Marina? (subtração – subtraindo a diferença).

Problemas de composição de transformações

São aqueles em que duas transformações são compostas para formar uma terceira.

1. Hoje pela manhã João ganhou 10 figurinhas e à tarde ganhou 5. Quantas figurinhas ele ganhou hoje? (adição – duas transformações positivas).
2. Hoje pela manhã João deu 4 figurinhas a um amigo e à tarde deu 3 ao seu primo. O que aconteceu com as figurinhas de João hoje? (adição – duas transformações negativas).
3. Hoje pela manhã João ganhou 10 figurinhas de um amigo e à tarde deu 4 ao seu primo. O que aconteceu com as figurinhas de João hoje? (subtração – uma transformação positiva e outra negativa).

O importante desses exemplos de situações-problema é mostrar que existem, em diferentes contextos, diferentes ideias e que muitas delas são resolvidas com o mesmo algoritmo.

Outros contextos podem levar-nos a categorizar diferentemente outras situações-problema. No entanto, se o professor trabalhar as duas operações (adição e subtração) simultaneamente, a compreensão pode acontecer de maneira mais efetiva, pois o raciocínio aditivo pode ser resumido na relação entre as parcelas e o todo. Nos mais diferentes contextos em que aparecem, os problemas aditivos podem ser resolvidos com duas operações: conhecidas as parcelas temos a adição e conhecidos o todo e uma das parcelas temos a subtração.

Em relação à multiplicação e à divisão, as ideias habituais diziam que o modelo para a multiplicação era o de adições repetidas e para a divisão era o modelo baseado na partição ou o modelo apoiado nas subtrações sucessivas.

Sobre a multiplicação e a divisão dos números naturais, uma complexidade se manifesta quando as operações são consideradas não somente da perspectiva do cálculo, mas em termos de como elas modelam situações. No trabalho com a Matemática em sala de aula, sente-se que a maior dificuldade encontrada por muitas crianças está no ato de decidir se um problema dado será modelado pela operação multiplicação ou divisão. A complexidade maior reside em um primeiro momento em tal percepção e, posteriormente, na resolução do algoritmo.

As classes mais importantes de situações envolvendo a multiplicação e a divisão com os números naturais são: a de grupos iguais, a de comparação multiplicativa, a de produto cartesiano e a de área retangular.

Exemplifiquemos algumas situações-problema envolvendo as estruturas multiplicativas.

1. Joãozinho, Zezinho e Pedrinho têm, cada um, 5 figurinhas. Quantas figurinhas eles têm? (multiplicação).
2. João tem 4 vezes mais figurinhas do que Pedro. Pedro tem 5 figurinhas. Quantas figurinhas tem João? (comparação multiplicativa).

3. Marcos tem 4 camisas e 3 calças. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir? (multiplicação – produto cartesiano).
4. Um retângulo tem lados de 5 cm e 4 cm. Qual é a área dessa figura? (multiplicação – área retangular).
5. Quinze laranjas são distribuídas igualmente entre 3 crianças. Quantas laranjas cada criança recebeu? (divisão – partição ou distribuição equitativa).

Se tomarmos as crianças como grupos, essa divisão deve explicitar quantos elementos (laranjas) serão distribuídos em cada grupo:

1. Se tenho 15 laranjas, para quantas crianças posso dar 5 laranjas? (divisão – medida ou quota).

Se nesse problema conhecemos a quantidade de elementos em cada grupo, então devemos calcular quantos grupos (crianças) serão contemplados. Em outras palavras, quantas vezes uma quantidade cabe em outra. Nos números naturais, calculamos quantas vezes uma quantidade menor está contida em uma quantidade maior, podendo, às vezes, sobrar um resto. É possível uma quantidade maior caber em uma menor?

Estamos trabalhando com os números naturais, mas nada impede de lançarmos algumas questões aos estudantes. Por exemplo: quantas vezes R$ 0,50 cabem em R$ 2,00? A resposta 4 é esperada nos números naturais. E a questão: quantas vezes R$ 2,00 cabem em R$ 0,50? Esses problemas podem ser bons exemplos para justificar a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos, ou seja, precisaremos de outros números para modelar o problema proposto. Nesse caso, os números fracionários.

As crianças são curiosas e, em muitas oportunidades, o próprio professor pode propor situações-problema além do conteúdo que está ensinando. No entanto, as respostas devem ser intuitivas e contextualizadas, além disso o incentivo à imaginação é essencial para o aprendizado.

A divisão é uma operação em que ideias intuitivas que as crianças trazem podem dificultar a sua compreensão. A própria palavra divisão tem diferentes significados em nossa língua. Por exemplo:

a) a plateia ficou dividida quanto ao resultado... (discórdia);

b) o rio divide as cidades... (separação);

c) o livro está dividido em... (partes).

E mais, as divisões no dia a dia nem sempre são feitas em partes iguais. Um adulto pode dividir algo com as crianças levando em conta a idade ou o tamanho de cada uma delas, assim as partes podem não ser equitativas.

Em termos matemáticos, as partes de uma divisão são, necessariamente, iguais, e quando sobrar um resto este deve ser o menor possível.

Por fim, temos que o raciocínio multiplicativo envolve duas relações: a) um a vários que leva à multiplicação e b) distribuição que leva à divisão.

Retomando, podemos concluir que as operações mudam de adição e subtração para multiplicação e divisão. Os números mudam de números naturais para números fracionários. Nessas mudanças está uma que é fundamental e com implicações distintas: uma mudança na natureza da unidade. Enquanto as situações aditivas envolvem quantidades que são derivadas da realidade e quantificadas por contagem ou medida, as situações multiplicativas quase sempre requerem a manipulação de relações entre as quantidades. E essa mudança não é trivial.

Assim, o domínio de muitos conceitos numéricos e das relações numéricas ao longo da escolarização parece requerer uma reconceituação da noção de número, isto é, uma mudança significativa no modo pelo qual o número é concebido. Por exemplo, enquanto o número natural é quantidade, o número fracionário é uma síntese da quantidade e da medida.

Dadas as mudanças fundamentais na natureza do número, não será surpreendente que reorientações cognitivas significantes sejam necessárias para construir e compreender tais mudanças. Isso significa que é provável não haver caminhos contínuos suaves da adição e subtração para a multiplicação e divisão, nem dos números naturais para os números fracionários. A multiplicação não é, simplesmente, adição repetida; e números fracionários não são, simplesmente, pares ordenados de números naturais. Os novos conceitos não são extensões dos conceitos anteriores.

4.4.2 As técnicas operatórias (os algoritmos)

Adição e subtração

As primeiras adições e subtrações com dois números parecem não apresentar nenhuma dificuldade para as crianças, de forma que elas podem adicionar ou subtrair tanto da direita para a esquerda quanto da esquerda para a direita. Cabe ao professor ir articulando os algoritmos com materiais concretos como, por exemplo, o ábaco e mostrar que nas operações de adição e subtração adiciona-se ou subtrai-se os algarismos dos números naturais sempre da direita para a esquerda.

$$
\begin{array}{r}
42 \\
+\,23 \\
\hline
65
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
65 \\
-\,23 \\
\hline
42
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
65 \\
-\,42 \\
\hline
23
\end{array}
$$

As dificuldades das crianças com adições e subtrações podem aparecer nas situações a seguir:

$$
\begin{array}{r}
4\ 5 \\
+\,2\ 7 \\
\hline
6\ \mathbf{12} \\
7\ 2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
72 \\
-\,27 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
72 \\
-\,45 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
6\ \mathbf{12} \\
-\,2\ 7 \\
\hline
4\ 5
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
6\ \mathbf{12} \\
-\,4\ 5 \\
\hline
2\ 7
\end{array}
$$

Pensamos que na adição não seria errado se alguns estudantes escrevessem um resultado como 612, pois em um momento posterior o 12 poderia ser decomposto em 10 + 2, de forma que o 2 ficaria na coluna da unidade e o 10 se transformaria em uma dezena. O papel quadriculado poderia ser um bom recurso didático. A regra seria: cada quadradinho não poderia conter mais de um número.

Em relação às subtrações apresentadas, elas poderiam ser trabalhadas como inversas das adições e com a ideia de decompor uma dezena em 10 unidades, acrescentando-as à ordem das unidades.

Essas subtrações também podem ser feitas pelo método da compensação. Esse método é justificado por uma propriedade da subtração.

Propriedade: se acrescentarmos quantidades iguais ao minuendo e ao subtraendo, o resto de uma subtração não se altera.

Em símbolos, temos que:

$se\ x - y = k$, entªo $(x + a) - (y + a) = k$

Assim, o que faríamos no algoritmo seria:

$$
\begin{array}{r}
72 \\
-\,27 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad\qquad\qquad
\begin{array}{r}
7\ {}^{1}2 \\
-\,2^{1}\,7 \\
\hline
4\ \ 5
\end{array}
$$

E poderia ser justificado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccccccccc} 72 & = & 70 & + & 2 & \rightarrow & 70 & + & \mathbf{12} \\ 27 & = & 20 & + & 7 & \rightarrow & \mathbf{30} & + & 7 \\ \cline{7-9} & & & & & & 40 & + & 5 \\ & & & & & & & \mathbf{45} & \end{array}$$

Assim, acrescentaríamos 10 a 2, obtendo 12, e para compensar acrescentaríamos 10 a 20, obtendo 30, ou ainda acrescentaríamos uma dezena às duas já existentes.

Temos, a seguir, outro exemplo do método da compensação:

$$\begin{array}{r} 325 \\ -\ 187 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrr} 3 & {}^{1}2 & {}^{1}5 \\ -\ 1 & {}^{+1}8 & {}^{+1}7 \\ \hline 1 & 3 & 8 \end{array}$$

E a sua justificativa:

$$\begin{array}{ccccccc} 325 & = & 300 & + & 20 & + & 5 \\ 187 & = & 100 & + & 80 & + & 7 \\ & & & & & & \\ & = & 300 & + & 20 & + & \mathbf{15} \\ & & 100 & + & \mathbf{90} & + & 7 \\ & & & & & & \\ & = & 300 & + & \mathbf{120} & + & \mathbf{15} \\ & & \mathbf{200} & + & \mathbf{90} & + & 7 \\ \cline{3-7} & & 100 & + & 30 & + & 8 \\ & & & & & & \\ & & & & \mathbf{138} & & \end{array}$$

Nos exemplos envolvendo o método da compensação, os acréscimos e as compensações feitos aos números das subtrações são 10 e 100 porque o nosso sistema é decimal.

Multiplicação

	C	D	U
	1	2	3
	→	1	2
	2	4	6
1	2	3	
1	4	7	6

Poderíamos exemplificar a multiplicação, nos primeiros exercícios, mostrando todos os produtos feitos por meio da decomposição (nesse caso: unidades, dezenas e centenas) dos números que expressam os fatores. Então:

123	=			100	+	20	+	3
x12	=			x		10	+	2
6				200	+	40	+	6
40		1000	+	200	+	30		
200		1000	+	400	+	70	+	6
30					1476			
200								
1000								
1476								

Divisão

Método habitual (curto):

23	5
3	4

Esse algoritmo tem cálculos escondidos que precisam ser mostrados. E mais, a divisão pode, em um primeiro momento, ser trabalhada em termos de previsão e estimativa.

D U	
2 3	5
	$\cancel{X}$ –
	D U

O resultado dessa divisão é um número com um algarismo.

O algoritmo da divisão poderia ser justificado pelos exemplos:

1) Método longo

$$\begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \hline -5 & 1 \\ 18 & 1 \\ -5 & 1 \\ 13 & 1 \\ -5 & \\ 8 & \\ -5 & \\ 3 & \end{array} \quad \left.\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\end{array}\right\}\mathbf{4}$$

2)

$$\begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \hline -15 & 3 \\ 8 & 1 \\ -5 & \\ 3 & \end{array} \quad \left.\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right\}\mathbf{4}$$

3)

$$\begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \hline -20 & 4 \\ 3 & \end{array}$$

----

4) Método curto

$$\begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$$

Outro exemplo. Método habitual (curto):

$$\begin{array}{r|l} 3472 & 13 \\ \hline 87 & 267 \\ 092 & \\ 01 & \end{array}$$

Pensamos que as ideias de previsão e estimativa poderiam vir primeiro. Então:

$$\begin{array}{r|c} 3472 & 13 \\ \hline & \_\ \_\ \_\ \_ \\ & \text{MCDU} \\ & \text{X}\quad\quad\ \ \end{array}$$

Essa divisão tem como resultado um número com três algarismos, pois o número 3.742 tem unidades de “grupos de mil (3)”, mas não é possível dividir esses grupos em 13 partes sem decompô-los, no caso em grupos de cem. Assim, é possível dividir 34 centenas em 13 partes. Portanto, esse número tem centenas, ou três algarismos.

Outro modo de justificar o algoritmo da divisão:

1 x 13	=	13	10 x 13	=	130	100 x 13	=	1300
2 x 13	=	26	20 x 13	=	260	200 x 13	=	2600
3 x 13	=	39	30 x 13	=	390	300 x 13	=	3900
4 x 13	=	52	40 x 13	=	520			
5 x 13	=	65	50 x 13	=	650			
6 x 13	=	78	60 x 13	=	**780**			
7 x 13	=	**91**	70 x 13	=	**910**			
8 x 13	=	**104**	80 x 13	=	1040			
9 x 13	=	117	90 x 13	=	1170			
10 x 13	=	130	100 x 13	=	1300			

Inicialmente temos a tabuada do 13, em seguida multiplicamos os resultados da tabuada por 10 e depois por 100. Agora, a estimativa é melhor, ou seja, o resultado da divisão é um número entre 200 e 300.

Os números em negrito auxiliam nas outras estimativas sobre o resultado final da divisão.

$$\begin{array}{r|l}
3472 & 13 \\ \cline{2-2}
-2600 & \left.\begin{array}{r} 200 \\ 60 \\ 7 \end{array}\right\} \mathbf{267} \\ \cline{1-1}
0872 & \\
780 & \\ \cline{1-1}
092 & \\
-091 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

Por fim, temos o método curto, mas agora justificado:

$$\begin{array}{r|l}
3472 & 13 \\ \cline{2-2}
87 & 267 \\
92 & \\
1 &
\end{array}$$

Esses exemplos mostram que em Matemática tudo precisa ser justificado, comprovado e, na maioria das vezes, essas demonstrações são bastante simples. Os algoritmos, no caso das operações fundamentais, são estruturas matemáticas que estão embasadas nas propriedades dessas operações, assim como nas propriedades do sistema de numeração decimal. Uma vez compreendidos, as suas utilizações facilitam e tornam mais rápida a resolução dos cálculos das situações-problema.

4.4.3 O ensino da Aritmética: algumas sugestões

O ensino habitual da Aritmética sempre teve uma sequência parecida: uma determinada operação era definida a partir de seus elementos constitutivos; em seguida, dava-se ênfase nas técnicas operatórias e, por fim, eram dados os problemas de fixação ou aplicação relacionados a essa operação. A ênfase nos algoritmos valorizava uma Matemática mais quantitativa com sérios prejuízos para os aspectos qualitativos das operações, que são necessários para a plena compreensão dos conceitos e princípios matemáticos envolvidos nas operações. As aplicações das operações em problemas geravam dúvidas nos estudantes, pois estes não sabiam, em determinadas situações, qual a operação que deveriam utilizar. Perguntas do tipo: “é conta de mais ou de menos?” eram comuns em salas de aula de Matemática. Muitos problemas também eram resolvidos a partir da identificação de palavras associadas a determinadas operações.

Atualmente, o trabalho com cálculo tem outra proposta. Desde o início da aprendizagem é aconselhável que as operações adição e subtração e multiplicação e divisão sejam trabalhadas aos pares, pois uma operação é o inverso da outra.

O ensino das operações começa por situações-problema significativas, desafiadoras e inteligentes, as quais permitem, em um primeiro momento, que as crianças utilizem seus conhecimentos intuitivos ou exercitem sua imaginação na busca das soluções. Estimativas, cálculo mental, desenhos ou recursos manipulativos podem ser usados para a resolução dos problemas. Esse momento é essencial na aprendizagem matemática, pois o que queremos não é mostrar o que o estudante pode fazer pela Matemática, mas sim o que a Matemática pode fazer pelo estudante, que é, por exemplo, mostrar que ele pode pensar por si mesmo.

Em seguida, o professor trabalha qualitativamente as operações destacando os seus elementos constitutivos. As propriedades das operações são identificadas e exemplificadas. Os algoritmos são justificados como estruturas matemáticas que expressam as propriedades tanto do sistema de numeração decimal quanto das operações.

Por fim, novos problemas são trabalhados na perspectiva de que as operações fiquem plenamente compreendidas. Nesse momento, estratégias de verificação e controle dos resultados dos problemas devem ser incentivadas.

4.4.4 Propriedades das operações fundamentais

No estudo das operações fundamentais com os números naturais é importante também que o professor mostre algumas propriedades dessas operações. Para a adição, por exemplo, apresentar as propriedades:

a) fechamento: o resultado da adição de dois números naturais (soma) é também um número natural;

b) comutativa: adicionar *a* + *b* dá o mesmo resultado que adicionar *b* + *a*;

c) elemento neutro: zero mais qualquer número natural dá como resultado o próprio número;

d) associativa: se tivermos três números naturais em uma adição, o resultado é sempre o mesmo independentemente da ordem que adicionarmos as parcelas.

Em relação à subtração, a propriedade de fechamento, por exemplo, não é válida e isso pode preparar os estudantes para a necessidade de se ampliar o conjunto dos naturais. Nesse caso, a ampliação será o conjunto dos números inteiros. Assim, o professor pode mostrar para os estudantes alguns contextos que precisam dessa ampliação para ser modelados.

Com a multiplicação temos propriedades semelhantes, ou seja:

a) fechamento: o resultado da multiplicação de dois números naturais (produto) também é um número natural;

b) comutativa: multiplicar *a* por *b* dá o mesmo resultado que multiplicar *b* por *a*;

c) elemento neutro: a unidade vezes qualquer número natural dá como resultado o próprio número;

d) associativa: se tivermos três números naturais em uma multiplicação, o resultado é sempre o mesmo independentemente da ordem que multiplicarmos os fatores.

Em relação à divisão, por exemplo, a propriedade de fechamento não é válida e isso significa que precisamos ampliar os números naturais. Nesse caso, a ampliação será os números fracionários.

Ainda podemos apresentar aos estudantes uma propriedade que une a adição com a multiplicação – a propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação –, que simbolicamente podemos escrever: $a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

4.5 Considerações finais

Nesta unidade procuramos articular as ideias qualitativas relacionadas às operações fundamentais com os seus aspectos quantitativos (algoritmos). Assim, um mesmo algoritmo pode expressar ideias e contextos diferentes de uma operação. E mais, esses algoritmos são estruturas matemáticas justificadas pelas propriedades de nosso sistema de numeração. A nossa experiência tem mostrado que as dificuldades que as crianças apresentam para a plena compreensão das operações fundamentais residem tanto em não entender que contextos diversos podem ser modelados por uma mesma operação quanto pela dissociação entre as propriedades do sistema de numeração e as técnicas operatórias.

Cabe ao professor identificar essas dificuldades e, principalmente, sua natureza para, então, levar as crianças a superá-las.

4.6 Estudos complementares

Um material muito bom para o professor que ensina Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental é o livro:

CARDOSO, V. C. *Materiais didáticos para as quatro operações*. São Paulo: CAEM-IME-USP, 2006.

Para outras leituras sobre o movimento entre o aprender e o ensinar matemática nos anos iniciais, sugerimos o livro de:

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental*: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

4.7 Alguns comentários finais

Ao longo das quatro unidades que compõem este livro, enfatizamos a importância do trabalho do professor de modo que tenha condições de ajudar seus alunos a envolverem-se com conceitos matemáticos importantes para sua formação intelectual.

Concordamos com Charlot (2005, p. 84-85) quando diz que é "o aluno quem deve aprender e que não se pode aprender em seu lugar" e que, para isso, deve-se colocá-lo em uma "atividade intelectual". Essa atividade é central ao processo de aprendizagem, deste modo "é legítimo prestar maior atenção a ela, no que ela tem de singular". Colocar o estudante no centro do processo de ensino permitirá que ocorra o compartilhamento do princípio de que “ensinar não é somente transmitir” (CHARLOT, 2005, p. 84-85). Isso significa que o conceito de ensino não é passivo, e é importante que se estabeleça a relação entre professor e aluno. Nas relações sociais e culturais que são estabelecidas no processo de ensino e aprendizagem, há a aprendizagem mútua e a construção de conceitos entre indivíduos. Em outras palavras, pode-se dizer que é possível aprender procedimentos na repetição de mecanismos, mas não significa que a aprendizagem de conceitos tenha ocorrido.

Temos certeza que esta é uma obra inacabada. Muitos conceitos importantes não foram abordados neste livro. No entanto, esperamos que ele contribua para reflexões sobre a matemática e o papel que o professor dos anos iniciais tem que assumir para proporcionar seu ensino num ambiente de aprendizagem, no qual professor e estudante envolvam-se intelectualmente numa atividade em que todos ensinam e todos aprendem.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CHARLOT, B. *Relação com o saber, formação dos professores e globalização*: questões para a educação hoje. Porto Alegre: Artmed, 2005.

CRATO, N. *O "eduquês" em discurso directo*: uma crítica da pedagogia romântica e construtivista. Lisboa: Gradiva, 2006.

DAVIS, P. D.; HERSH, R. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DINIZ, M. I. S. V. A metodologia "resolução de problemas". *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 18, n. 16, p. 1-19, 1991.

FASHEH, M. Matemática, cultura e poder. *Revista Zetetiké*, Campinas, v. 6, n. 9, p. 9-30, 1998.

FAYOL, M. *A criança e o número*: da contagem à resolução de problemas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Revista Zetetiké*, Campinas, v. 3, n. 2, p. 1-36, 1995.

FREMONT, H. *Teaching secondary mathematics through applications*. Boston: Editora Prindle, Weber and Schmidt, 1979.

KAMII, C. *A criança e o número*: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 a 6 anos. Campinas: Papirus, 1986.

LAKATOS, I. *A lógica do descobrimento matemático*: provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

MENEGHETTI, R. C. G. (Org.). *Educação matemática*: vivências refletidas. São Paulo: Centauro, 2006. p. 137-144.

MIGUEL, A. A constituição do paradigma do formalismo pedagógico clássico em educação matemática. *Revista Zetetiké*, Campinas, v. 3, n. 3, p. 7-39, 1995.

ONUCHIC, L. R.; BOTTA, L. S. Reconceitualizando as quatro operações fundamentais. *Revista de Educação Matemática*, São Paulo, ano 6, n. 4, p. 19-26, 1998.

PIRES, C. M. C. O que há de novo na velha arte de resolver problemas? In: SANTOS, V. M.; PIRES, C. M. C.; SILVA, P. E. M.; CURI, E.; PIROLA, N.; MORAES, M. S. S. (Orgs.). *Programa de Formação Continuada*. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2002. v. 5.

ROCHA, I. C. B. Ensino da matemática: formação para a exclusão ou para a cidadania? *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, ano 8, n. 9/10, p. 22-31, 2001.

SANTOS, V. M. O projeto curricular de cada professor e o currículo oficial. In: SANTOS, V. M.; PIRES, C. M. C.; SILVA, P. E. M.; CURI, E.; PIROLA, N.; MORAES, M. S. S. (Orgs.). *Programa de Formação Continuada*. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2002. v. 5.

SEVERINO, A. J. *Filosofia da educação*: construindo a cidadania. São Paulo: FTD, 1994.

STEINER, H. G. Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education. *For the learning of mathematics*, Montreal, v. 7, n. 1, p. 7-13, 1987.

THOM, R. Modern mathematics: an educational and philosophic error? In: TYMOCZKO, T. *New directions in the philosophy of mathematics*. Boston: Birkhauser, 1986. p. 67-78.

VAN de WALLE, J. A. *Matemática do ensino fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZUNINO, D. M. L. *A matemática na escola*: aqui e agora. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

ZUNINO, D. M. L.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, C.; SAIZ, I. *Didática da matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

SOBRE OS AUTORES

Cármen Lúcia Brancaglion Passos

Licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Campinas (PUC), com mestrado e doutorado na área de Educação pela Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Atualmente é docente do Departamento de Metodologia de Ensino da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), lecionando nos cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia, tanto na modalidade presencial quanto a distância. É docente do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da UFSCar, desenvolvendo pesquisas na área de processos de ensino e de aprendizagem, no campo da formação de professores que ensinam Matemática. Coordena o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEM) vinculado ao PPGE da UFSCar e é pesquisadora do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores de Matemática, sediado na Faculdade de Educação da Unicamp.

Mauro Carlos Romanatto

Possui graduação com Licenciatura em Física pela UFSCar (1974), especialização em Metodologia do Ensino na Área de Ciências pela Associação de Escolas Reunidas (1975), mestrado em Educação pela UFSCar (1987) e doutorado em Educação pela Unicamp (1997). Atualmente é Professor Assistente Doutor da Faculdade de Ciências e Letras da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp), no campus de Araraquara. Atua na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática e Formação de Professores. É pesquisador do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da UFSCar e do Grupo de Estudos e Propostas sobre a Formação do Educador Contemporâneo da Unesp/ campus de Araraquara.

Este livro foi impresso em novembro de 2011 pelo Departamento de Produção Gráfica – UFSCar.